

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Αν $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Μονάδες 6,5

β) Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I	Στήλη II
A. $\operatorname{Re}(z)$	1. $-\alpha - \beta i$
B. $\operatorname{Im}(z)$	2. $\alpha - \beta i$
Γ. $-z$	3. $\alpha + \beta$
Δ. z	4. α
Ε. $ z $	5. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
ΣΤ. $z \cdot z$	6. $\alpha^2 + \beta^2$
	7. β

Μονάδες 6

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α) Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή.
Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.
Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
Μονάδες 7

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.
Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για την οποία ισχύει

$$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$
Μονάδες 6

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.
Μονάδες 9

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το

λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200}\right)$ λίτρα

και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x, \quad 0 < x \leq 90.$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 13

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 9

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 2

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ ισχύει:

$$|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Μονάδες 2

8. Για το μιγαδικό αριθμό i ισχύει:

$$i^4 = 1$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 3 - 4i$

- α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $z_1 + 5z_2$

Μονάδες 6

- β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{z_2}{z_1}$

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z_1 είναι:
- $$\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$$

Μονάδες 6

- δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1^8 .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 5

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} & , \text{αν } x < 2 \\ -x^2 + k & , \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

όπου $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

α. το k , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$,

Μονάδες 7

β. το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

Μονάδες 5

γ. το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ και

Μονάδες 5

δ. την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x+3}$ στο $-\infty$.

Μονάδες 8

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} .$$

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
4. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, είναι ο μιγαδικός $\bar{z} = -x + yi$.
5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Μονάδες 15**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

a. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$$

και το σημείο $x_0 = 5$.

a. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5, f(5))$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \frac{i(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.

Να αποδείξετε ότι :

a. $w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2 + (y-1)^2} i$,

Μονάδες 8

- β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$ και

Μονάδες 8

- γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Αν $a + \beta i$, $\gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma + \delta i \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$$

Μονάδες 9

- B. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης II** (δύο αριθμοί στη **Στήλη II** περισσεύουν).

Στήλη I	Στήλη II
A. i^1	1. $-i$
B. i^2	2. $+1$
Γ. i^3	3. i
Δ. i^4	4. -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II**, ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Γ, Δ, Ε και ΣΤ, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

Δ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Μονάδες 3

ΣΤ. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ , της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f , παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + k, & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του k , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε να ισχύει:

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6ax + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και a, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $a = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = \alpha + (1-\alpha)i.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν $\text{Im}(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

β. αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

Μονάδες 5

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Μονάδες 7

δ. οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.

1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 12

2. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του z ;

Μονάδες 3

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Μονάδες 2

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Μονάδες 2

4. Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Μονάδες 2

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad w = k + 4i, \quad k > 0.$$

Για τους z, w ισχύουν:

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \text{και} \quad |w| = 5.$$

- α. Να αποδείξετε ότι $z = -1 + i$.

Μονάδες 8

- β. Να αποδείξετε ότι $k = 3$.

Μονάδες 8

- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu \bar{z} = 3i - w$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $k = -1$.

Μονάδες 5

- β. Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

- γ. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(2 - \alpha)x^2 - kx + 2}{x - 3} \quad \text{με} \quad \alpha, k \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad x \neq 3.$$

- α. Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.

Μονάδες 10

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 7

- B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή Λ, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Μονάδες 3

2. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ των συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Μονάδες 3

3. Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 3

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού $\Delta = [0, +\infty)$, τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 3

5. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται

οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 3

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c .$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (1)$$

- α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

Μονάδες 9

- β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}|z_2| + i^{2006}$.

Μονάδες 9

- γ. Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - z_1| = 5.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- I. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

- II. Για $\lambda = 0$

- α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

- β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Για $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- I. Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

II. Για $k = 3$

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Μονάδες 5

γ. και για κάθε $\alpha \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. 1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$.

Μονάδες 10

2. Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = z \cdot \bar{z}$.

Μονάδες 2

2. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx') τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

4. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$, τότε η f παίρνει στο $[α,β]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 2

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , τότε $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(\lambda-2)+2\lambda i$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

Μονάδες 9

- β. Αν ισχύει $z+\bar{z}=2$, να βρείτε το $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Μονάδες 7

- γ. Αν $|z|=2$ και $\operatorname{Im}(z)\neq 0$, να βρείτε το λ .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}$, με $x>0$.

- α. Να βρείτε τα όρια

$$\text{i) } \lim_{x\rightarrow+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{ii) } \lim_{x\rightarrow 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2}$$

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο $O(0,0)$ τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 9

- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-2x+6$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Αν για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $xf(x)=x+2\eta\mu x$, τότε:

- α. Να βρείτε το $f(0)$.

Μονάδες 7

- β. Να αποδείξετε ότι $f(x)<3$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 10

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

- Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
- Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. 1.** Αν $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 7

- 2.** Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 6

- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

- 1.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:
 $|z_1 + z_2| > |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 3

- 2.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu \eta x$.

Μονάδες 3

- 3.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 3

4. Αν μια συνάρτηση f είναι
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$
 - παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $(α, β)$ και
 - $f(α) = f(β)$
- τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο, ώστε: $f'(ξ) = 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + λz + μ = 0$, όπου $λ, μ$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

- A. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $λ = -6, μ = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 14

- B. Να αποδείξετε ότι:

α. $z_1^2 + z_2^2 = 0$

Μονάδες 6

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \leq 1 \\ (x-1)^2 & , x > 1 \end{cases}$

- A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι:

- α. συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

Μονάδες 8

- β. παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

- B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, 1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x}$,

όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

- B. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x' , να βρείτε την τιμή του k .

Μονάδες 8

- Γ. Για $k = 1$,

- α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

ΟΛΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Δεν θα αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Ώρα δυνατής αποχώρησης η 8.30' απογευματινή.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. 1.** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 5

- 2.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 8

- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ** , αν η πρόταση είναι **Σ ωστή**, ή **Λ** , αν αυτή είναι **Λ ανθασμένη**.

- 1.** $|z|^2 = z^2$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z .

Μονάδες 3

- 2.** Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο $M(\alpha, \beta)$.

Μονάδες 3

- 3.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

Μονάδες 3

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α,β)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 2 + 3i \text{ και } z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1.$$

- α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}_1 - z_2$.

Μονάδες 7

- γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $κ + λi$, όπου

$$κ, λ ∈ ℝ.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} αx^2 + β, & x ≤ 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases} \text{ με } α, β ∈ ℝ.$$

- α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $α + β = 5$.

Μονάδες 5

- β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $α = 1$ και $β = 4$.

Μονάδες 10

- γ. Για $α = 1$ και $β = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x ≠ 0$, στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Για $λ ∈ ℝ$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + λx^2 - 3x + 1, x ∈ ℝ.$$

- I. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του $λ$.

Μονάδες 4

- II. Για $λ = 0$

- α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

- β. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

Μονάδες 8

- γ. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β')**
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Για καθεμιά από τις επόμενες πέντε (5) προτάσεις, **α. έως ε.,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ** , αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ** , αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

α. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.

β. Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c , ισχύει ότι:

$$(cf(x))' = f'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

γ. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$, τότε ισχύει ότι:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

δ. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

B1. Αν ισχύει ότι $2z - i\bar{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z .

Μονάδες 8

B2. Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w + z| = |z|^2$.

Μονάδες 7

B3. Αν $z = 2 + i$ και $u = \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010} = -1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + \sin x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2 + 8) = f(6x)$

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} + 2x$, $x \neq 0$. Να βρείτε:

Δ1. Τα τοπικά ακρότατα της f .

Μονάδες 8

Δ2. Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

Δ3. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 4

Δ4. Το σημείο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 0$, της γραφικής παράστασης C_f της f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1, f(1))$, $B(3, f(3))$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} . Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\operatorname{csc} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w , με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| = 1 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

Μονάδες 4

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

B4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + x f'(x) = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x f(x) + \sigma \nu \nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1 - \sigma \nu \nu x}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 0$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 - \sigma \nu \nu x = \chi \eta \mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi \eta \mu \xi + \sigma \nu \nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2$$

Μονάδες 7

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει πάντα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

ε) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 36$$

$$|2w-1| = |w-2|$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=3$

Μονάδες 8

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$

Μονάδες 9

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta$, $x > 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Γ1. Αν είναι $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 4

Γ2. Αν είναι $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f :

- i) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη για κάθε α, β , την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)
- ii) έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο για $\alpha = 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, το $f(x_0) = 7$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος του ακροτάτου αυτού.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) > -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x^2 - x} = 2$
- $f(1) = f'(0)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = -3$

Μονάδες 8

Δ2. Αν η $g(x) = f(x) + \alpha(x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$, να βρείτε τον αριθμό α

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -2(\xi + 1)$

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (μονάδες 5).

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

Μονάδες 9

B3. Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$ και $u = \left(\frac{z_1 + i}{z_2 - i} \right)^{2013}$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και u .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x-1} + \alpha x$ με $x \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε το α , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x - 3y + 6 = 0$

Μονάδες 6

Αν $\alpha = 1$, τότε:

Γ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα

Μονάδες 6

Γ3. να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 8

Γ4. να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)f(x) - 6}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

Μονάδες 7

Δ2. η εξίσωση

$$f(x^3 - x + 1) = f(2)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$

Μονάδες 9

Δ3. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[1, 2]$, $[2, 3]$ και $[1, 3]$, και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ και $\xi \in (1, 3)$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:

$$2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

B1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

B2. Αν $z_1 = 1+i$ και $z_2 = 1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-3)^2(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία

α) είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 3$

και

β) η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της f είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (x-1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}$, $x \neq -1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία

με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, τότε

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Μονάδες 7

Δ2. α) Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h και στο $-\infty$.

β) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h .

Μονάδες 9

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.
- β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ΕΣΠΕΡΙΩΝ

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.

δ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

Μονάδες 7

B2. Έστω $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \leq w \leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

B3. Αν $w = -4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 , με $z_3 = 2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}.$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $(3,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} - x \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι
η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
Μονάδες 7
- A2.** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
Μονάδες 4
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και
να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
Μονάδες 4
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο
τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη
λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι
λανθασμένη.
- α) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.
- β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- γ) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε
 $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
- δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του
συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως
προς x .
- ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια
μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

- B1.** Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
Μονάδες 7
- B2.** Αν $\alpha = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
Μονάδες 11
- B3.** Για την παραπάνω τιμή του α , να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της
γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα
διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .
Μονάδες 7
- Γ2.** Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f'' .
Μονάδες 11
- Γ3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

- Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει
- $f'(x) \cdot f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f(0) = 1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Δ2. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x).$$

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \sin x$ στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$:

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \beta, & x \leq 0 \\ x + 5, & x > 0 \end{cases}$

B1. Να δείξετε ότι $\beta = 5$.

Μονάδες 8

B2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{3-5x}{x-2}$, $x \neq 2$.

Γ1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 7

Γ2. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}$, $x \in [\frac{5}{6}, 2)$ να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in [-1, 0) \\ \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

γ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 6, & x \leq 3 \\ -x^2 + (3 - \alpha)x + 3\alpha, & x > 3 \end{cases} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 9

B3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[3, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2, f(2))$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x)-1}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m².

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;
(Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;
(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;
(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

Μονάδες 8

B3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $g \circ f$.

Μονάδες 10

Γ2. Έστω ότι $h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ -(x-1)^4 + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι θετική.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)+x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$, όπου x_0 είναι η ρίζα του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
 ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , ισχύει $f'(x) > 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y' .

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο \mathbb{R} και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος B3, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho) (f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**