



Αλγεβρικές Παραστάσεις

1

1.6

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων



1.6

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) 7,32 \cdot 25 + 7,32 \cdot 75 \quad \beta) 347 \cdot \frac{7}{6} - 347 \cdot \frac{1}{6}$$

Πολλές φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος, μιας εξίσωσης, μιας ανίσωσης ή για την απλοποίηση ενός κλάσματος, είναι χρήσιμο να μετατραπεί μία παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\pi R^2 - \pi r^2$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $\pi(R^2 - r^2)$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $(R + r)(R - r) = R^2 - r^2$, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$$

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$3a + 3b - 3\gamma = 3(a + b - \gamma)$$

Για παράδειγμα, σε όλους τους όρους της παράστασης $3a + 3b - 3\gamma$ υπάρχει κοινός παράγοντας το 3, οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3a + 3b - 3\gamma = 3(a + b - \gamma).$$

Ομοίως η παράσταση $2a^2 - 2ab + 2a$, γράφεται $2a \cdot a - 2a \cdot b + 2a \cdot 1$, οπότε σε όλους τους όρους της υπάρχει κοινός παράγοντας το $2a$.

Άρα, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2a^2 - 2ab + 2a = 2a(a - b + 1).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι «βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2a$ ».

β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Στην παράσταση $ax + ay + 2x + 2y$, δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα, από τους δύο πρώτους όρους το a και από τους δύο τελευταίους το 2 , τότε σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα τον $x + y$. Έτσι, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\underbrace{ax + ay}_{a(x+y)} + \underbrace{2x + 2y}_{2(x+y)} = a(x+y) + 2(x+y) = (x+y)(a+2)$$

Την προηγούμενη παράσταση μπορούμε να τη χωρίσουμε και σε διαφορετικές ομάδες. Το αποτέλεσμα όμως της παραγοντοποίησης είναι και πάλι το ίδιο. Πράγματι, έχουμε:

$$\underbrace{ax + 2x}_{x(a+2)} + \underbrace{ay + 2y}_{y(a+2)} = x(a+2) + y(a+2) = (a+2)(x+y)$$

γ) Διαφορά τετραγώνων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη της ταυτότητας

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, τότε γράφεται και ως εξής:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων, π.χ. $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a + 3)(a - 3)$.

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Οι ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ γράφονται και ως εξής:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο), π.χ.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$$

Οι παραστάσεις $(x + 2)^2$ και $(y - 3)^2$ είναι γινόμενα παραγόντων, αφού

$$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) \text{ και } (y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;

- α) $2(x - y)(x + y)$ β) $2 + (x - y)(x + y)$ γ) $4(a - \beta)^2$ δ) $4 + (a - \beta)^2$
 ε) $(x + 2y)x - y$ στ) $(x + 2y)(x - y)$ ζ) $(a + \beta)(a + 3\beta)$
 η) $(a + \beta)(a + 3\beta) + 1$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

- α) $8x + 16 = 8(\dots\dots\dots)$ β) $3ay - y^2 = y(\dots\dots\dots)$
 γ) $6x^2 + 12x = \dots\dots\dots(x + 2)$ δ) $-4x^2 + 8x = -4x(\dots\dots\dots)$
 ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\dots\dots\dots)$ στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(\dots\dots\dots)$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:

- α) $3x^2(x + 1)$ β) $(x + 3)(3x^2 - 1)$ γ) $(x + 1)(3x^2 + 1)$ δ) $x(3x^2 + x + 1)$.

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

- α) $x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ ☐ β) $x^2 - 9 = (x - 9)(x + 9)$ ☐
 γ) $112^2 - 12^2 = 100 \cdot 124$ ☐ δ) $4y^2 - 1 = (4y - 1)(4y + 1)$ ☐
 ε) $4x^2 - a^2 = (2x - a)(2x + a)$ ☐ στ) $a^2 - (\beta - 1)^2 = (a + \beta - 1)(a - \beta - 1)$ ☐

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;

- α) $2(x - y)(x + y)$ β) $2 + (x - y)(x + y)$ γ) $4(a - \beta)^2$ δ) $4 + (a - \beta)^2$
 ε) $(x + 2y)x - y$ στ) $(x + 2y)(x - y)$ ζ) $(a + \beta)(a + 3\beta)$
 η) $(a + \beta)(a + 3\beta) + 1$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

- α) $8x + 16 = 8(\dots\dots\dots)$ β) $3ay - y^2 = y(\dots\dots\dots)$
 γ) $6x^2 + 12x = \dots\dots\dots(x + 2)$ δ) $-4x^2 + 8x = -4x(\dots\dots\dots)$
 ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\dots\dots\dots)$ στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(\dots\dots\dots)$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:

- α) $3x^2(x + 1)$ β) $(x + 3)(3x^2 - 1)$ γ) $(x + 1)(3x^2 + 1)$ δ) $x(3x^2 + x + 1)$.

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

- α) $x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ ☐ β) $x^2 - 9 = (x - 9)(x + 9)$ ☐
 γ) $112^2 - 12^2 = 100 \cdot 124$ ☐ δ) $4y^2 - 1 = (4y - 1)(4y + 1)$ ☐
 ε) $4x^2 - a^2 = (2x - a)(2x + a)$ ☐ στ) $a^2 - (\beta - 1)^2 = (a + \beta - 1)(a - \beta - 1)$ ☐

1. α - γ - στ - ζ
 2. α) $x + 2$, β) $3a - y$, γ) $6x$ δ) $x - 2$, ε) $x + 1$, στ) $x - 2$
 3. γ
 4. Σ - Λ - Σ - Λ - Σ - Λ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

5 Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x - y)(x + y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $a^3 - 2^3 = (a - 2)(\dots\dots\dots)$

β) $a^3 + 3^3 = (a + 3)(\dots\dots\dots)$

γ) $(2x)^3 - 1 = (2x - 1)(\dots\dots\dots)$

δ) $1 + (5y)^3 = (1 + 5y)(\dots\dots\dots)$

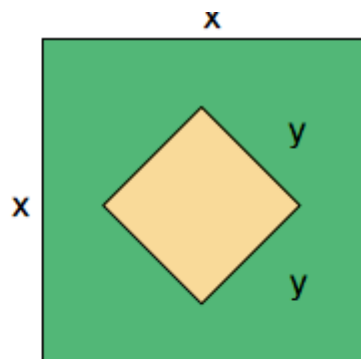
7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 - 5x + 25)$

β) $8 + a^3 = (2 + a)(2^2 - 2a + a^2)$

γ) $(3y)^3 + 1 = (3y + 1)(3y^2 - 3y + 1)$

δ) $1 - (2\beta)^3 = (1 - 2\beta)(1 + 2\beta + 4\beta^2)$


☐
☐
☐
☐

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

5 Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x - y)(x + y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $a^3 - 2^3 = (a - 2)(\dots\dots\dots)$

β) $a^3 + 3^3 = (a + 3)(\dots\dots\dots)$

γ) $(2x)^3 - 1 = (2x - 1)(\dots\dots\dots)$

δ) $1 + (5y)^3 = (1 + 5y)(\dots\dots\dots)$

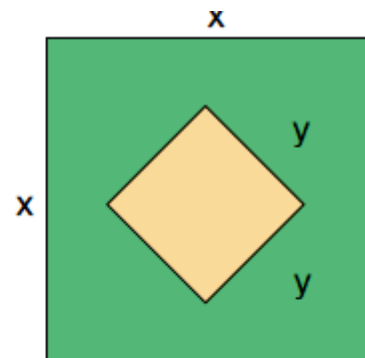
7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 - 5x + 25)$

β) $8 + a^3 = (2 + a)(2^2 - 2a + a^2)$

γ) $(3y)^3 + 1 = (3y + 1)(3y^2 - 3y + 1)$

δ) $1 - (2\beta)^3 = (1 - 2\beta)(1 + 2\beta + 4\beta^2)$


☐
☐
☐
☐

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (\dots\dots\dots)^2$

β) $4a^2 - 4a + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (\dots\dots\dots)^2$

9 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού $\pi a^2 + 2\pi a + \pi$, με $a > 0$, έχει ακτίνα

α) $a + 2$

β) $a^2 + 1$

γ) $a + 1$

δ) $\pi(a + 1)$

10 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$x^2 + (a + \beta)x + a\beta$	$a\beta$	$a + \beta$	a	β	$(x + a)(x + \beta)$
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

11 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + (a + 2)x + 2a = (x + \dots\dots) \cdot (x + \dots\dots)$

β) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + \dots\dots) \cdot (x + \dots\dots)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (\dots\dots\dots)^2$

β) $4a^2 - 4a + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (\dots\dots\dots)^2$

9 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού $\pi a^2 + 2\pi a + \pi$, με $a > 0$, έχει ακτίνα

α) $a + 2$

β) $a^2 + 1$

γ) $a + 1$

δ) $\pi(a + 1)$

10 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$x^2 + (a + \beta)x + a\beta$	$a\beta$	$a + \beta$	a	β	$(x + a)(x + \beta)$
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

11 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + (a + 2)x + 2a = (x + \dots\dots) \cdot (x + \dots\dots)$

β) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + \dots\dots) \cdot (x + \dots\dots)$

8. α) $x + 3$, β) $2a - 1$, γ) $y^2 - 1$, δ) $5 + x^3$

9. γ

10.

$a\beta$	$a + \beta$	a	β	$(x+a)(x+\beta)$
2	3	1	2	$(x+1)(x+2)$
2	-3	-1	-2	$(x-1)(x-2)$
-6	5	6	-1	$(x+6)(x-1)$
6	5	2	3	$(x+2)(x+3)$
-2	-1	-2	1	$(x-2)(x+1)$
-2	1	2	-1	$(x+2)(x-1)$

11. α) $(x + a)(x + 2)$, β) $(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{3})$