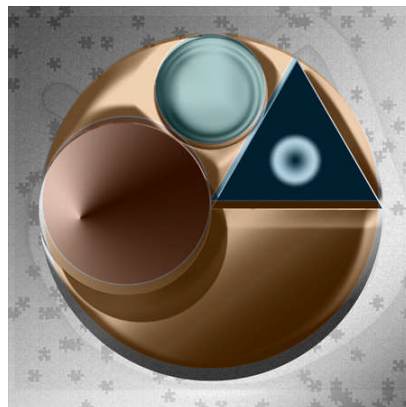


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2012

ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
- ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
- ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Βαγγέλης Νικολακάκης
Μαθηματικός

ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το παρόν φυλλάδιο φτιάχτηκε για να προσφέρει λίγη βοήθεια στους μαθητές της Γ Γυμνασίου , για τις εξετάσεις Μαΐου – Ιουνίου 2012 ,αλλά και για τους αξιότιμους κ.κ. συναδέλφους που θέλουν να οργανώσουν τις επαναλήψεις τους.... Οι ενότητες αφορούν την διδακτέα και εξεταστέα ύλη 2011-2012

- **Στην ενότητα 1** δίνεται η δυνατότητα για μια καλή επανάληψη θεωρίας με καλή μελέτη των ερωτήσεων και τις αντίστοιχες απαντήσεις.
- **Στην ενότητα 2** δίνεται η δυνατότητα για εξάσκηση και αυτοέλεγχο στις ερωτήσεις δίνοντας τη δική σας απάντηση και ελέγχετε την ορθότητα της από το σχολικό βιβλίο ή από την ενότητα-1
- ❖ **Στην ενότητα 3** δίνεται μια σειρά από επαναληπτικές ασκήσεις ,στο πνεύμα των εξετάσεων.
- ❖ **Στην ενότητα 4** δίνονται θέματα από εξετάσεις σχολείων για θεωρία-ασκήσεις
- ❖ **Στην ενότητα 5** δίνονται 3 διαγωνίσματα με θέματα από εξετάσεις σχολείων για να αυτοαξιολογηθείτε λίγο πριν τις εξετάσεις...

καλη επιτυχία

ΠΗΓΕΣ

- ❖ ΘΕΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΧΕΙΟ (Βαγγέλη Α Νικολακάκη)
- ❖ Σχολικό Βιβλίο
- ❖ Αρχείο ασκήσεων κ. Μανωλόπουλου
- ❖ Αρχείο ασκήσεων κ. Βασιλά Νικολάου

Υ.Γ.

Κάθε κριτική , σχόλιο , παρατήρηση ή διόρθωση είναι ευπρόσδεκτη.

Με εκτίμηση

Βαγγέλης Α Νικολακάκης

vaggelisnikolakakis@hotmail.com



1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣμε απάντηση

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο Αλγεβρικές Παραστάσεις

A. 1. 1

1. Τι ονομάζετε δύναμη a^n με βάση τον πραγματικό a και εκθέτη το φυσικό $n > 1$;

- ♦ Ονομάζεται δύναμη a^n με βάση τον αριθμό a και εκθέτη το φυσικό $n > 1$, το γινόμενο από n παράγοντες ίσους με a .

$$\text{Δηλαδή, } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

- ♦ Ορίζουμε ακόμη:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \text{ με } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ με } a \neq 0 \text{ και } n = 1, 2, 3, \dots$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο ;

- ♦ Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$\alpha. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \beta. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \gamma. \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\delta. \quad \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n = \frac{\beta^n}{\alpha^n} \quad \epsilon. \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-n} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n \quad \sigma\tau. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- ♦ Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού a ;

- ♦ Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a και συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ ο θετικός αριθμός x που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό a .

$$\text{Επομένως: } \sqrt{a} = x \text{ αν και μόνο αν } x^2 = a \quad x, a > 0$$

$$\text{Ορίζουμε ακόμη } \sqrt{0} = 0$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;

- ♦ Από τον ορισμό τις τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού $a \geq 0$ έχουμε $(\sqrt{a})^2 = a$

♦ Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $\sqrt{a^2} = |a|$

♦ Αν $a \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a\beta}$

♦ Αν $a \geq 0$ και $\beta > 0$, τότε $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}$

5. Αν $a \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι a και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $a = \beta \Leftrightarrow a^2 = \beta^2$.

Έτσι:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a\beta} \Leftrightarrow (\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{a\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = a\beta \Leftrightarrow a\beta = a\beta \text{ που ισχύει.}$$

6. Αν $a \geq 0$ και $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι a και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $a = \beta \Leftrightarrow a^2 = \beta^2$,

Έτσι:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{a}{\beta} \Leftrightarrow \frac{a}{\beta} = \frac{a}{\beta}, \text{ που ισχύει.}$$

A. 1. 2

7. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;

♦ Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

8. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

♦ Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

9. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

10. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;

♦ Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσότερων μεταβλητών.

- ♦ Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

11. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;

- ♦ Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

12. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;

- ♦ Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.
- ♦ Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

13. Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- ♦ Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- ♦ Ονομάζουμε σταθερό μονώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.
- ♦ Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

15. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

- ♦ Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

16. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

- ♦ Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

17. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

A. 1. 3

18. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

- ♦ Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

19. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- ♦ Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

20. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- ♦ Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.
- ♦ Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

A. 1. 4

21. Πως πολλαπλασιάζουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ;

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;

Για να πολλαπλασιάσουμε:

- α.** Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- β.** Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

A. 1. 5

22. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

23. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

- i. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- ii. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- iii. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- iv. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- v. $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- vi. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- vii. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

Απόδειξη

- i. $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \underline{\alpha\beta} + \underline{\beta\alpha} + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- ii. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \underline{\alpha\beta} - \underline{\beta\alpha} + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- iii. $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha + \beta) =$
 $\underline{2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} + \underline{\beta\alpha^2} + \underline{2\alpha\beta^2} + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 2\alpha$
- iv. $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha - \beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha - \beta) =$
 $\underline{2\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} - \underline{\beta\alpha^2} + \underline{2\alpha\beta^2} - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 -$
- v. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2$
- vi. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \underline{\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} - \underline{\beta\alpha^2} - \underline{\alpha\beta^2} - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3$
- vii. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \underline{\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} + \underline{\beta\alpha^2} - \underline{\alpha\beta^2} + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3$

A. 1. 6

24. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- ♦ Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

25. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$

ομαδοποίηση

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

- ♦ Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- ♦ Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \delta\gamma &= \\ \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\beta + \gamma) &= \\ (\beta + \gamma)(\alpha - \delta) & \end{aligned}$$

διαφορά τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, στην

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο τελειών τετραγώνων σε γινόμενο.

Άθροισμα ή διαφορά κύβων

Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha^3 - \beta^3 \\(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha^3 + \beta^3\end{aligned}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Σε κάθε μια από τις οποίες αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο κύβων σε γινόμενο.

Ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα

$$(\alpha + \beta)^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha - \beta)^2,$$

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \quad \text{και} \quad (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$$

Παραγοντοποιήσει τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ έχουμε:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =$$

$$\underline{x^2} + \underline{x\alpha} + \underline{x\beta} + \underline{\alpha\beta} = \quad \text{Ομαδοποίηση}$$

$$x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) = \quad \text{Κοινός παράγοντας}$$

$$(x + \alpha)(x + \beta)$$

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha) \cdot (x + \beta)$$

A. 1. 7

26. Πως ορίζεται η διαίρεση δύο Πολυωνύμων;

Η διαίρεση δύο Πολυωνύμων είναι η διαδικασία εκείνη κατά την οποία μας δίνονται δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$

(διαιρετέος) και $\delta(x)$ (διαιρέτης) με $\delta(x) \neq 0$ και βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων

$\pi(x)$ (πηλίκο) και $\nu(x)$ (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x) \quad (\text{Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης})$$

Το $\nu(x)$ είναι ίσο με μηδέν οπότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$ ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

A. 1. 8

27. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή

περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων

παραγόντων;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

A. 1. 9

28. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

29. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρονομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

30. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

A. 1. 10

31. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} &= \frac{\alpha + \gamma}{\beta} & \text{και} & & \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} &= \frac{\alpha - \gamma}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} & \text{και} & & \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta} \quad \beta\delta \neq 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} & \text{και} & & \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \beta\gamma \neq 0 \\ \frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{1} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} & \text{και} & & \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \beta\gamma \neq 0 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο Εξισώσεις Ανισώσεις

A. 2. 1

32. Τι ονομάζεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο;

- ♦ Ονομάζεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $ax + \beta = 0$ με $a \neq 0$.
- ♦ Ο a λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο β σταθερός (ή γνωστός) όρος.
- ♦ Ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον x στην
- ♦ εξίσωση προκύπτει ισότητα που αληθεύει.

- ♦ Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

33. Πότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μία λύση πότε είναι αδύνατη και πότε αόριστη;

- ♦ Αν $a \neq 0$, η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$
- ♦ Αν $a = 0$, και $\beta \neq 0$ η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0 \cdot x = -\beta$ και δεν έχει λύση (αδύνατη),
- ♦ Αν $a = 0$, και $\beta = 0$, η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0 \cdot x = 0$ οπότε κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη).

A. 2. 2

34. Τι ονομάζεται εξίσωση 2^{ου} βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- ♦ Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής
- ♦ $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με a, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $a \neq 0$.
- ♦ Οι αριθμοί a και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.
- ♦ Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την
- ♦ οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που την επαληθεύουν.

35. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } a, \beta, \gamma \text{ πραγματικούς αριθμούς και } a \neq 0.$$

Απόδειξη

- ♦ Για την απόδειξη του τύπου αυτού θα εφαρμόσουμε την μέθοδο « συμπλήρωσης τετραγώνου» Για την εξίσωση λοιπόν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με a, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $a \neq 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$4a^2x^2 + 4a\beta x + 4a\gamma = 0 \quad [\text{Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με } 4a]$$

$$4a^2x^2 + 4a\beta x = -4a\gamma \quad [\text{Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β' μέλος}]$$

$$4a^2x^2 + 4a\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4a\gamma \quad [\text{Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ισότητας το } \beta^2]$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4a\gamma \quad [\text{Στο α' μέλος έχουμε το ανάπτυγμα του } (2ax + \beta)^2]$$

$$(2ax + \beta)^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

Την παράσταση $\beta^2 - 4a\gamma$ ονομάζουμε διακρίνουσα και την συμβολίζουμε με Δ οπότε η εξίσωση $(2ax + \beta)^2 = \beta^2 - 4a\gamma$ γράφεται $(2ax + \beta)^2 = \Delta$ (i)

Αν $\Delta \geq 0$ από την (i) έχουμε: $(2ax + \beta)^2 = (\sqrt{\Delta})^2$

$$2ax + \beta = \pm \sqrt{\Delta}$$

$$2ax = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού είναι αδύνατον να ισχύει η εξίσωση (i)

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με a, β, γ πραγματικούς αριθμούς

και $a \neq 0$ δίδονται από τον τύπο $x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ και υπάρχουν μόνο εφ' όσον $\Delta \geq 0$

36. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

- α. έχει δύο άνισες ρίζες;
- β. έχει μια διπλή ρίζα ;
- γ. δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με a, b, γ πραγματικούς αριθμούς, $a \neq 0$ και διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma:$$

α. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, όταν $\Delta > 0$

β. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{-b}{2a}$, όταν $\Delta = 0$

γ. δεν έχει ρίζες, όταν $\Delta < 0$

37. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ όταν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με

$a \neq 0$ έχει λύσεις τις ρ_1, ρ_2 :

- ♦ Αν ρ_1, ρ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$ax^2 + bx + \gamma = a \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$

A. 2. 4

38. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρανομαστή.

Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση, πρέπει οι παρανομαστές των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

A. 2. 5

39. Πως συγκρίνουμε(διατάσσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;

- ♦ Αν οι a και b είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:
- ♦ Λέμε ότι ο a είναι μεγαλύτερος του b και το συμβολίζουμε $a > b$, όταν $a - b > 0$.
- ♦ Λέμε ότι ο a είναι μικρότερος του b και το συμβολίζουμε $a < b$, όταν $a - b < 0$.
- ♦ Λέμε ότι ο a είναι ίσος με τον b και το συμβολίζουμε $a = b$, όταν $a - b = 0$.

Αντίστροφα

- ♦ Αν $a - b > 0$, τότε ο a είναι μεγαλύτερος του b .
- ♦ Αν $a - b < 0$, τότε ο a είναι μικρότερος του b .
- ♦ Αν $a - b = 0$, τότε ο a είναι ίσος με τον b .

40. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;

- ♦ Η σχέση της μορφής $a > b$ (ή $a < b$) ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα a και b (ή τα β και α) αντίστοιχα.
- ♦ Οι ανισότητες $a < b$ και $\gamma < \delta$ (ή $a > b$ και $\gamma > \delta$) λέγονται ομοιόστροφες (έχουν την ίδια φορά)

- ♦ Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$ (ή $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$) λέγονται ετερόστροφες (έχουν αντίθετη φορά)
- ♦ Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του x και μικρότερος του y , γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα $x < \alpha < y$.
- ♦ Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό α , γράφουμε $x \geq \alpha$.

41. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;

- ♦ Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- ♦ Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.
Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- ♦ Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

- ♦ Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.

Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

- ♦ Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Δηλαδή αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

A. 3. 1

42. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι λύση της;

- ♦ Ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$.
- ♦ Λύση της γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

43. Πως παριστάνεται γραφικά κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ και τι ισχύει γι' αυτή;

Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία ε έτσι ώστε:

- ♦ Αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, ε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $ax + by = \gamma$.
- ♦ Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση $ax + by = \gamma$ το σημείο ανήκει στην ευθεία ε .

44. Τι παριστάνουν οι εξισώσεις;

$a. y = k$ με $k \neq 0$

β. $y = 0$

γ. $x = k$ με $k \neq 0$

δ. $x = 0$

α. Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$

β. Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$.

γ. Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(k, 0)$

δ. Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.

45. Πως βρίσκουμε τις τομές μιας ευθείας $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ και $b \neq 0$ με τους άξονες

$x'x$ και $y'y$;

Κάθε σημείο του $x'x$ έχει τεταγμένη 0, οπότε και το A, σημείο τομής της $ax + by = \gamma$ με τον $x'x$, θα έχει τεταγμένη $y = 0$ και τετμημένη x με $ax + b \cdot 0 = \gamma$ ή $ax = \gamma$ ή $x = \frac{\gamma}{a}$. Άρα $A(\frac{\gamma}{a}, 0)$

Κάθε σημείο του $y'y$ έχει τετμημένη 0, οπότε και το B, σημείο τομής της $ax + by = \gamma$ με τον $y'y$, θα έχει τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη y με $a \cdot 0 + by = \gamma$ ή $by = \gamma$ ή $y = \frac{\gamma}{b}$. Άρα $B(0, \frac{\gamma}{b})$

A. 3. 2

46. Τι ονομάζεται;

α. Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ;

β. Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ;

γ. Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ;

α. Ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ένα σύστημα της

μορφής,
$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$
 με ένα τουλάχιστον από τα $a, b, a', b' \neq 0$.

β. Ονομάζεται λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

γ. Ονομάζεται επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

47. Πως γίνεται η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y και πότε αυτό έχει μία λύση, είναι αδύνατο, είναι αόριστο;

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος και:

♦ αν τέμνονται το σύστημα έχει **μία λύση** τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

- ♦ αν είναι παράλληλες δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα **δεν έχει λύση** και λέμε ότι είναι **αδύνατο**.
- ♦ Αν **συμπίπτουν (ταυτίζονται)** έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** και λέμε ότι είναι **αόριστο**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο Συναρτήσεις

A. 4. 1

48. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση $y = ax^2$ με $a > 0$;

- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a > 0$ είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- ♦ Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a > 0$ έχει **κορυφή** το σημείο $O(0, 0)$ και βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.
- ♦ Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a > 0$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$,
- ♦ Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y , που σημαίνει ότι η παραβολή $y = ax^2$ με $a > 0$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.
- ♦ Όταν η τιμή του a αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

A. 4. 1

49. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση $y = ax^2$ με $a < 0$;

- ♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a < 0$ είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- ♦ Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a < 0$ έχει **κορυφή** το σημείο $O(0, 0)$ και βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$.
- ♦ Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a < 0$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$,
- ♦ Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y , που σημαίνει ότι η παραβολή $y = ax^2$ με $a < 0$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.
- ♦ Όταν η απόλυτη τιμή του a αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

A. 4. 2

50. Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;

Ονομάζεται τετραγωνική κάθε συνάρτηση της μορφής $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$.

51. Τι γνωρίζεται για τη συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ είναι παραβολή με:

- ♦ Κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- ♦ Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή K και έχει εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- ♦ Αν $\alpha > 0$, η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- ♦ Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ παίρνει μέγιστη τιμή $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο Πιθανότητες

52. Τι είναι το σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που καθορίζονται με απόλυτη σαφήνεια και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

53. Πως μπορεί παρασταθεί ένα σύνολο;

Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με **αναγραφή** ή με **περιγραφή** των στοιχείων του και με το **διάγραμμα Venn**.

54. Πότε δύο σύνολα λέγονται ίσα;

Ίσα ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

55. Πότε ένα σύνολο A ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου B ;

Ένα σύνολο A ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του συνόλου B και συμβολίζεται $A \subseteq B$.

56. Τι ονομάζεται κενό σύνολο και πως συμβολίζεται ;

Ονομάζεται **κενό** σύνολο το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Το **κενό** σύνολο συμβολίζεται με $\emptyset$.

57. Τι ονομάζεται ένωση δύο συνόλων A, B και πως συμβολίζεται;

Ένωση δύο συνόλων A, B ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και συμβολίζεται με $A \cup B$.

58. Τι ονομάζεται τομή δύο συνόλων A, B και πως συμβολίζεται;

Τομή δύο συνόλων A, B ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cap B$.

59. Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός συνόλου A ως προς ένα βασικό σύνολο Ω και πως συμβολίζεται;

Συμπλήρωμα ενός συνόλου A ως προς ένα βασικό σύνολο Ω ονομάζεται το σύνολο που έχει όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' .

60. Τι ονομάζεται πείραμα τύχης;

Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του με απόλυτη βεβαιότητα.

61. Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και πως συμβολίζεται;

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω .

62. Τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης και πότε αυτό πραγματοποιείται;

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .

Ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεση του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.

63. Ποιο ενδεχόμενο ονομάζεται βέβαιο και ποιο αδύνατο σε ένα πείραμα τύχης;

Βέβαιο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος.

Αδύνατο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.

64. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης ονομάζονται ασυμβίβαστα;

Δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης ονομάζονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \emptyset$.

65. Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A ;

Ονομάζεται συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A το ενδεχόμενο A' που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A .

66. Τι ονομάζεται πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα και ποιες οι ιδιότητες της;

- ♦ Ονομάζεται πιθανότητα ενός ενδεχομένου A σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα ο αριθμός

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

- ♦ Από τον ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$\diamond P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \text{ και } P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$$

- ♦ Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

67. Ποιοι είναι Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων;

Σ' ένα πείραμα τύχης

- ♦ Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A) + P(A') = 1$
- ♦ Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

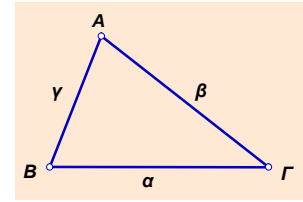
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ -ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο Γεωμετρία

B. 1. 1

68. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;

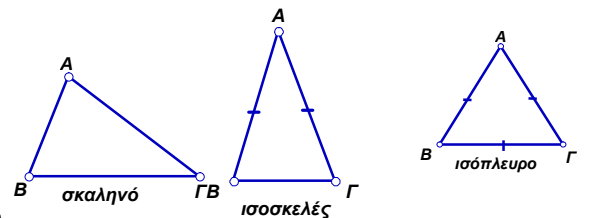
- ♦ Ονομάζεται **τρίγωνο** το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.
- ♦ Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του
- ♦ **Πλευρές** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- ♦ **Γωνίες** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.



69. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;

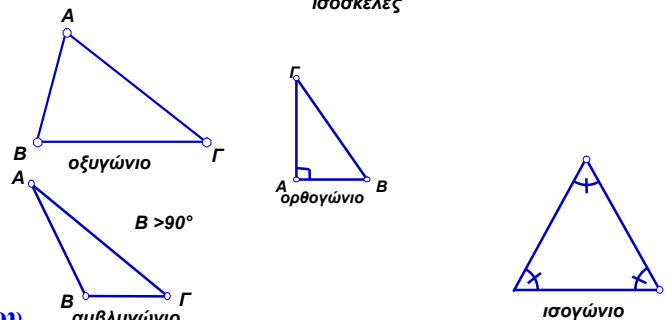
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:

- ♦ **σκαληνό**, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- ♦ **ισοσκελές**, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- ♦ **ισόπλευρο**, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.



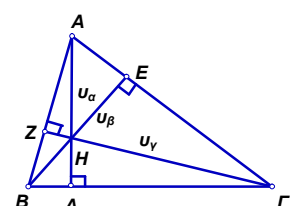
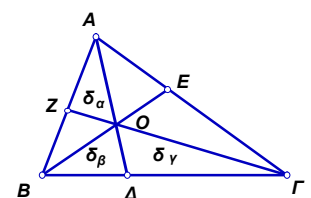
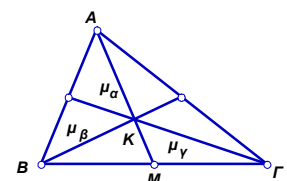
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:

- ♦ **οξυγώνιο**, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- ♦ **ορθογώνιο**, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- ♦ **αμβλυγώνιο**, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.
- ♦ **Ισογώνιο** αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες



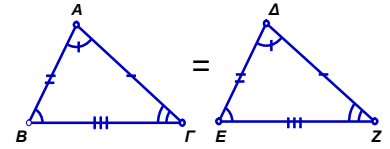
70. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.

- ♦ **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο ABΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται μ_α , μ_β , μ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.
- ♦ **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή.
Κάθε τρίγωνο ABΓ έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται δ_α , δ_β , δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- ♦ **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.
Κάθε τρίγωνο ABΓ έχει τρία ύψη που συμβολίζονται u_α , u_β , u_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



71. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;

Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους (πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες) ίσες μία προς μία.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{\Delta} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array} \right\} \text{ Γωνίες}$$

Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα τότε:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array} \right\} \text{ Ομόλογες πλευρές}$$

72. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;

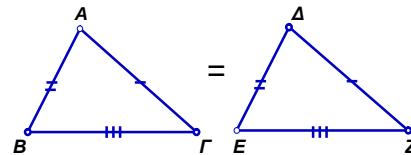
(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)

Κριτήριο (Π. Π. Π.)

- ♦ Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.

- ♦ Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array} \right\} \text{ οπότε είναι } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$$

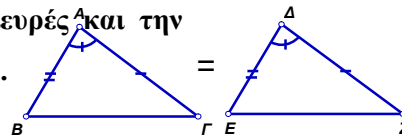


- ♦ Κριτήριο (Π. Γ. Π.)

- ♦ Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του ενός είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.

- ♦ Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \\ A\Gamma = \Delta Z \\ \hat{A} = \hat{\Delta} \end{array} \right\} \text{ οπότε είναι } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$$

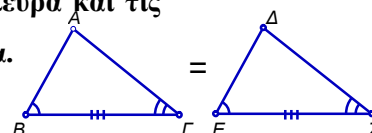


- ♦ Κριτήριο (Π. Γ. Γ.)

- ♦ Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.

- ♦ Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array} \right\} \text{ οπότε είναι } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$$



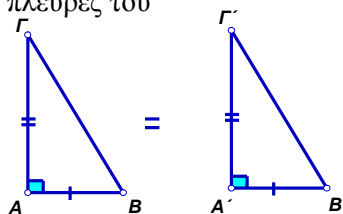
73. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

(Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)

- ♦ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο κάθετες πλευρές του ενός είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.

- ♦ Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν :

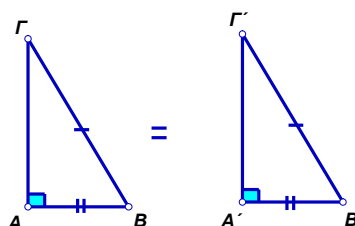
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$



- ♦ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά του άλλου.

- ♦ Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν :

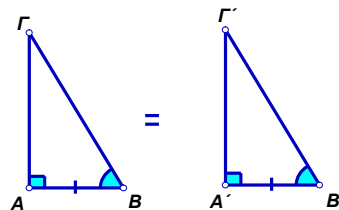
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$



- ♦ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με τη μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη της οξεία γωνία του άλλου.

- ♦ Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

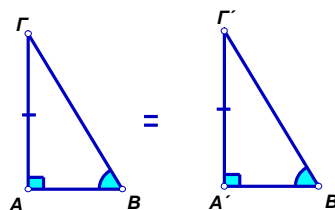
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ 1 \quad AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$



- ♦ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η απέναντι της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την μία κάθετη πλευρά και την απέναντι της οξεία γωνία του άλλου.

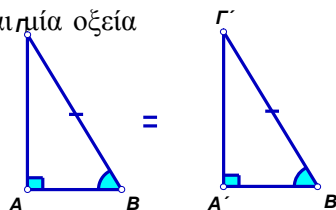
- ♦ Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$



- ♦ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του άλλου.

- ♦ Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

74. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ;

- ♦ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- ♦ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

75. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

- ♦ Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- ♦ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

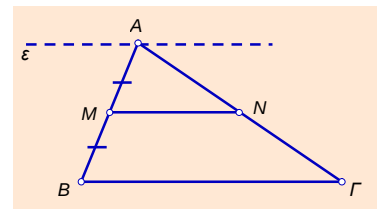
76. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και το σημείο M μέσο της πλευράς του AB .

Από το M φέρουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο σημείο N . Θα δείξουμε ότι $AN = NG$.

Από το σημείο A φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία $\varepsilon \parallel B\Gamma$. Οι παράλληλες ευθείες ε , MN και $B\Gamma$ ορίζουν ίσα τμήματα στην AB , άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην AG . Επομένως $AN = NG$.



B. 1. 2

77. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;

- ♦ Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ προς το ευθύγραμμο τμήμα AB , που συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, ονομάζεται ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.
- ♦ Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

78. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ ;

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, δ ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα β, γ ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

79. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών ;

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:

- ◆ Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.
- ◆ Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.
- ◆ Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

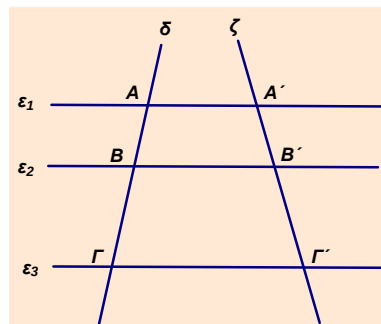
B. 1. 3

80. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και τις πρόταση που προκύπτουν από αυτό για ένα τρίγωνο.

- ◆ Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.

$$\text{Δηλαδή αν } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} =$$

$$\frac{AG}{A'G'}$$



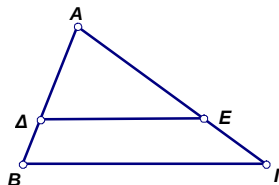
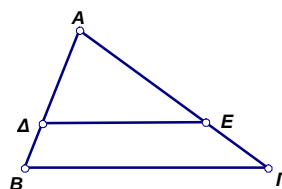
- ◆ Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του, σε ίσους λόγους.

$$\text{Δηλαδή αν } \Delta E \parallel B\Gamma \text{ τότε } \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB}$$

Αντίστροφα:

- ◆ Αν μια ευθεία που τέμνει δύο πλευρές τριγώνου τις χωρίζει σε ίσους λόγους, είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά.

$$\text{Δηλαδή αν } \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} \text{ τότε } \Delta E \parallel B\Gamma$$



B. 1. 4

81. Τι ονομάζεται ομοιόθετο ενός σημείου Α με κέντρο ομοιοθεσίας δοσμένο σημείο Ο και λόγο ομοιοθεσίας τον αριθμό λ ;

Ονομάζεται ομοιόθετο ενός σημείου Α με κέντρο ομοιοθεσίας δοσμένο σημείο Ο και λόγο ομοιοθεσίας τον αριθμό λ το σημείο Α' της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο ισχύει $OA' = \lambda \cdot OA$.

82. Ποιες είναι οι ιδιότητες δύο ομοιόθετων πολυγώνων Π και Π' ;

- ◆ Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- ◆ Οι ανάλογες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- ◆ Αν το πολύγωνο Π' είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ τότε το Π' είναι:
 - μεγέθυνση του Π, όταν $\lambda > 1$
 - σμίκρυνση του Π, όταν $0 < \lambda < 1$ και
 - ίσο με το Π, όταν $\lambda = 1$.

B. 1. 4

83. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;

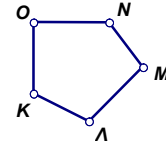
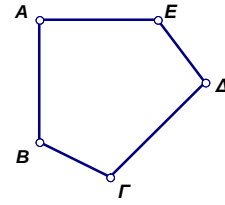
Δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι τα πολύγωνα $ABΓΔΕ$ και $OKΛMN$ που έχουν,

$$\hat{A} = \hat{O}, \hat{B} = \hat{K}, \hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}, \hat{\Delta} = \hat{M}, \hat{E} = \hat{N}$$

$$\text{και } \frac{AB}{OK} = \frac{B\Gamma}{K\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda M} = \frac{\Delta E}{MN} = \frac{EA}{NO} = \lambda \text{ είναι όμοια.}$$

Το λ ονομάζεται λόγος ομοιότητας.



84. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων;

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

- ♦ Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- ♦ Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- ♦ Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- ♦ Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

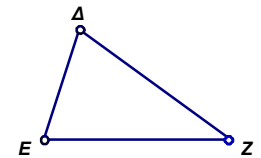
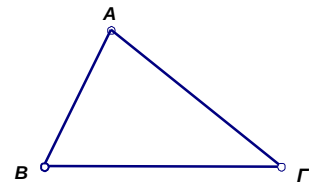
85. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

- ♦ Δύο τρίγωνα λέγονται όμοια όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή

$$\text{αν } \triangle AB\Gamma \sim \triangle EZ, \text{ τότε } \hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{Z}, \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$$

$$\text{και } \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ}$$

- ♦ Ο λόγος των αντιστοίχων (ομολόγων) πλευρών τους ονομάζεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με λ .



86. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

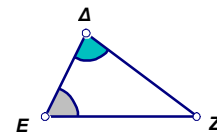
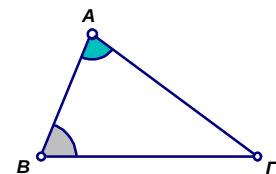
(Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.

Αν δηλαδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E}, \text{ τότε } \triangle AB\Gamma \sim \triangle EZ,$$

$$\text{και επομένως } \hat{\Gamma} = \hat{Z} \text{ και } \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ}$$



B. 1. 5

87. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

- ♦ Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο Τριγωνομετρία

B. 2. 1

88. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

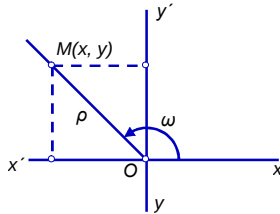
♦ Έστω ω ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$) η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox , όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά.

♦ Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ με $\widehat{xOM} = \omega$ και $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ τότε ορίζουμε:

♦ $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$

♦ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$

♦ $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$



♦ Το $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ παίρνουν τιμές από το -1 έως το $+1$.

♦ Είναι δηλαδή $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$

♦ Η $\epsilon\phi\omega$ παίρνει οποιαδήποτε τιμή.

♦ Αν το $M(x, y)$ βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο, τότε $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\epsilon\phi\omega > 0$

♦ Αν το $M(x, y)$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο, τότε $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, $\epsilon\phi\omega < 0$

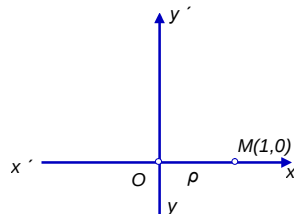
89. Ποιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας $\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 90^\circ$ ή $\omega = 180^\circ$;

Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το $M(1, 0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$ οπότε έχουμε:

♦ $\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$

♦ $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$

♦ $\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

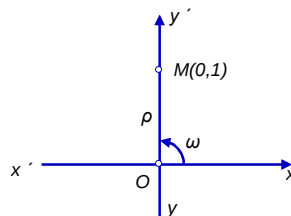


Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το $M(0, 1)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$ οπότε έχουμε:

♦ $\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$

♦ $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$

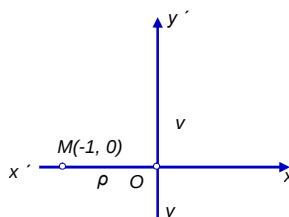
♦ $\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται, αφού $x = 0$



Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το σημείο $M(-1, 0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$ οπότε έχουμε:

♦ $\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$

♦ $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$



$$\diamond \quad \varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

90. Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:

- ♦ $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- ♦ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- ♦ $\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

91. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:

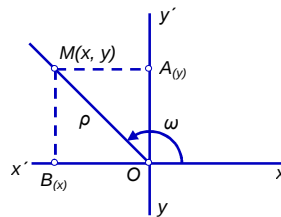
α. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και β. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Απόδειξη α.

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} =$$

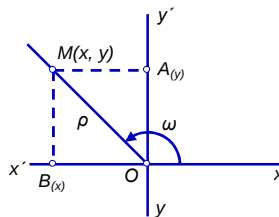
$$\frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{|y|^2 + |x|^2}{\rho^2} = \frac{OA^2 + OB^2}{\rho^2}$$

$$\frac{OA^2 + AM^2}{\rho^2} = \frac{OM^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$



Απόδειξη β.

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$



92. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των ημιτόνων.

- ♦ Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

Απόδειξη

- ♦ Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και το ύψος του ΓΔ ($\Gamma\Delta \perp AB$)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \quad \text{οπότε} \quad \Gamma\Delta = \beta \cdot \eta\mu A \quad (1)$$

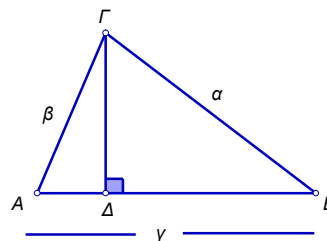
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \quad \text{οπότε} \quad \Gamma\Delta = \alpha \cdot \eta\mu B \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\beta \cdot \eta\mu A = \alpha \cdot \eta\mu B \quad \text{οπότε} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad (3)$$

$$\text{Όμοια αποδεικνύουμε ότι} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad (4)$$



Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

93. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των συνημιτόνων.

Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι σχέσεις

- ♦ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$
- ♦ $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cos B$
- ♦ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos \Gamma$

Απόδειξη

- ♦ Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και το ύψος του ΓΔ ($\Gamma\Delta \perp AB$)

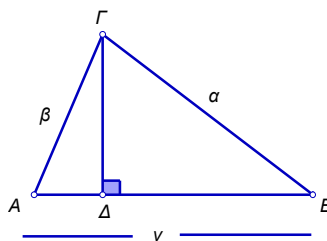
Θα δείξουμε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) έχουμε:

$$\cos A = \frac{AD}{\beta} \text{ οπότε } AD = \beta \cdot \cos A \quad (1)$$

και από το θεώρημα του Πυθαγόρα:

$$\Delta\Gamma^2 + AD^2 = \beta^2 \quad (2)$$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) από το θεώρημα του

Πυθαγόρα έχουμε:

$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - AD)^2 =$$

$$\underline{\Delta\Gamma^2} + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AD + \underline{AD^2} \stackrel{(2)}{=} \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AD \stackrel{(1)}{=}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\beta\cos A$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cos B \text{ και } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos \Gamma$$





Άλγεβρα

1. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες :

$$(a + b)^2 = \dots\dots\dots$$

$$a^2 - b^2 = \dots\dots\dots$$

$$\text{και να αποδείξετε ότι: } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

2. α) Τι ονομάζουμε μονώνυμο και τι πολυώνυμο(γράψτε από ένα παράδειγμα).

β) Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια και πότε αντίθετα

γ) Να συμπληρώσετε την ισότητα $(a - b)^3 = \dots\dots\dots$ και να την αποδείξετε.

3. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

β) Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες: $(a + b)(a - b) = \dots\dots\dots$

$$(a + b)^3 = \dots\dots\dots$$

4. α) Τι είναι άθροισμα ομοίων μονωνύμων και τι είναι γινόμενο μονωνύμων;

β) Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(a - b)^2 = \dots\dots\dots \quad a^2 - b^2 = \dots\dots\dots \quad (a - b)^3 = \dots\dots\dots$$

5. α) Τι λέγεται ταυτότητα;

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$(a + b)^2 = \dots\dots\dots \quad a^2 - 2ab + b^2 = \dots\dots\dots \quad (a - b)(a + b) = \dots\dots\dots$$

γ) Να αποδείξετε ότι $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

6. α) Τι ονομάζεται ταυτότητα;

β) Αποδείξτε την ταυτότητα $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

γ) Συμπληρώστε τα κενά:

$$(a + b)^3 = \dots\dots\dots$$

$$(a - b)^3 = \dots\dots\dots$$

$$(a + b)(a - b) = \dots\dots\dots$$

7. α) Τι ονομάζουμε μονώνυμο;

β) Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια;

γ) Τι ονομάζουμε ταυτότητα; Να συμπληρωθούν οι ταυτότητες:

$$(a + b)(a - b) = \dots\dots\dots \quad (a - b)^2 = \dots\dots\dots \quad (a + b)^3 = \dots\dots\dots$$

8. α) Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού;

β) Ποιον αριθμό ονομάζουμε διακρίνουσα στην εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$;

γ) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ όταν $b^2 - 4ac > 0$;

δ) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ όταν $b^2 - 4ac = 0$;

ε) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ όταν $b^2 - 4ac < 0$;

9. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

- α) Πως ονομάζεται αυτή η εξίσωση;
 β) Ποιος αριθμός ονομάζεται διακρίνουσα αυτής της εξίσωσης;
 γ) Πότε αυτή η εξίσωση είναι αδύνατη;
 δ) Πότε αυτή η εξίσωση έχει μια ρίζα; Ποια είναι αυτή;
 ε) Πότε αυτή η εξίσωση έχει δυο ρίζες; Ποιες είναι αυτές;

Γεωμετρία

1. α) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
 i) Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας ω είναι αριθμοί μεταξύ του -1 και του 1 .
 ii) Η εφαπτομένη μιας γωνίας ω είναι αριθμός μεταξύ του -1 και του 1 .
 iii) Η αμβλεία γωνία έχει θετικό ημίτονο και αρνητικό συνημίτονο.
 iv) Υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\eta\mu\omega=0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=0$.

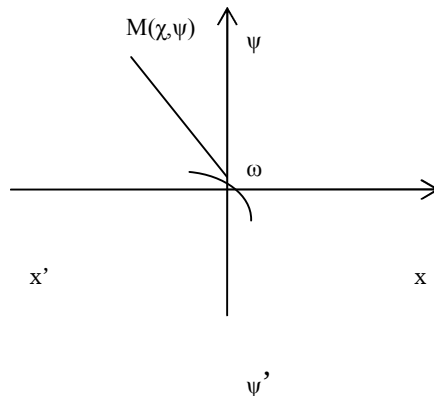
β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \dots$
- $\varepsilon\phi\omega = \frac{\dots}{\dots}$
- $1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = \dots$
- $1 - \eta\mu^2\omega = \dots$

2. α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

- | | |
|---|---|
| • $\eta\mu(90 - \omega) = \dots$ | • $\eta\mu(180 - \omega) = \dots$ |
| • $\sigma\upsilon\nu(90 - \omega) = \dots$ | • $\sigma\upsilon\nu(180 - \omega) = \dots$ |
| • $\varepsilon\phi\omega = \frac{\dots}{\dots}$ | • $\varepsilon\phi(180 - \omega) = \dots$ |
| • $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \dots$ | |

β) i) Με τη βοήθεια του σχήματος να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



ii) Να δείξετε την ισότητα $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \varepsilon\phi\omega$

3. α) Ποια είναι τα κριτήρια της ισότητας δύο τριγώνων;
 β) Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων τριγώνων;
 γ) Να εκφράσετε το θεώρημα του Θαλή (σχήμα, κανόνας, τύπος)
 δ) Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

4. Δίνεται ένα σημείο $M(x, y)$, σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy με $OM=r$ και γωνία $xOM = \omega$.

α) Να ορίσετε τους τρεις τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

5. Να χαρακτηρίσετε σωστή ή λάθος (Σ - Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Δύο τρίγωνα με ίσες γωνίες είναι ίσα.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες είναι όμοια:

iii) Δύο όμοια τρίγωνα είναι και ίσα:

6. α) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

Π_1 : Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες

Π_2 : Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες μία προς μία

Π_3 : Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν δυο γωνίες τους και δυο πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία

Π_4 : Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία και

η μια πλευρά του ενός είναι ίση με μια πλευρά του άλλου

Π_5 : Δυο ορθογώνια είναι ίσα όταν έχουν δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία

β) Αν ένα σημείο ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας ενός τριγώνου θα βρίσκεται πάνω σε

.....

A: Μια διάμεσο του τριγώνου

B: Μια διχοτόμο του τριγώνου

Γ: Μια πλευρά του τριγώνου

Δ: Ύψος τριγώνου

7. α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος;

Π_1 : Δυο ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα

Π_2 : Δυο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια

Π_3 : Δυο ισοσκελή τρίγωνα με μια γωνία τους ίση είναι όμοια

β) Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

Π_1 : Όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα πάνω σε μια ευθεία που τις τέμνει τότε

Π_2 : Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου

Π_3 : Αν από το μέσο πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μια πλευρά του τότε



ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1°

Εστω η παράσταση $A = (2x - 1)^2 - 2x(x - 1) - 5$

I) Να γίνουν οι πράξεις και να δείξετε ότι $A = 2x^2 - 2x - 4$

II) Να λυθεί η εξίσωση $A = 0$

III) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = κx^3 - (κ + λ)x^2 + (9 - 2λ)x + 1$.

A) Αν $P(2) = 35$ και $P(-1) = -1$ να βρείτε τους αριθμούς $κ$ και $λ$.

B) Για $κ = -6$ και $λ = -5$, να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = -5$ για $κ = -6$ και $λ = -5$.

Δ) Για $κ = -6$ και $λ = -5$, να παραγοντοποιηθεί το $A(x) = P(x) + 5$ και να δείξετε ότι για $x > 3$ είναι $A(x) < 0$.

(Υποδείξεις-απαντήσεις: A) $κ = -6$, $λ = -5$, B) $P(x) = (2x + 1)(-3x^2 + 7x + 6) - 5$, Γ) $x = -1/2$, $x = 3$, $x = -2/3$, Δ) $A(x) = (2x + 1)(x - 3)(-3x - 2)$, όταν $x > 3$ τότε $x > -1/2$, 3 κλπ)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η παράσταση $A(x) = \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{3-x} - \frac{x^2-5}{x^2-5x+6}$.

A) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $A(x)$.

B) Να δείξετε ότι $A(x) = \frac{-x-2}{x-3}$.

Γ) Να αποδείξετε ότι για $x > 3$ είναι $A(x) < 0$.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση $A(x) = \frac{2x}{2x-3}$.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνονται τα πολυώνυμα: $A(x) = 2x(3x-1) - (x-1) \cdot (1+x) - 3x^2 - 1$ και $B(x) = (3x-2)^2 - (2x-1) \cdot (4x-3)$

α. Να δείξετε ότι $A(x) = 2x^2 - 2x$ και $B(x) = x^2 - 2x + 1$.

β. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζεται η αλγεβρική παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ και μετά να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση $\Gamma(x)$.

ΘΕΜΑ 5°

Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)^2 - (x-1)(x+1) - 8(x-1)^2 = 0$

ΘΕΜΑ 6°

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{x-2y}{3} &= \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{2x-y}{4} &= x \end{aligned} \right\}$$

ΘΕΜΑ 7°

Εστω οι παραστάσεις $A = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 4}$, $B = \frac{2 - x}{x^2 - 9}$

I) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η κάθε παράσταση

ΙΙ) Να γίνει απλοποίηση στις δυο παραστάσεις

ΙΙΙ) Να λυθεί η εξίσωση $A=0$

ΙV) Να γίνει η πράξη $A \cdot B = \dots$

ΘΕΜΑ 8°

i) Τι λέγεται ταυτότητα ;

ii) Να δείξετε ότι $(\alpha + 2)^2 - (\alpha + 1)^2 - 2\alpha = 3$. για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

iii) Δείξε ότι $1002^2 - 1001^2 - 2000 = 3$.

ΘΕΜΑ 9°

Εστω η παράσταση $A = x^3 - 1 + 2(x^2 - 1)$

I) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης για $x = -2$

ΙΙ) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση A

ΙΙΙ) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{A}{x-1} = 3$

ΘΕΜΑ 10°

Εστω οι παραστάσεις $A = \frac{2-x}{x-1}$, $B = \frac{2x-2}{x-2}$

I) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η κάθε παράσταση

ΙΙ) Αν $x = \sqrt{3}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης A ως κλάσμα με ρητό παρονομαστή

ΙΙΙ) Να γίνουν οι πράξεις $A-1$, $A+B$, $A \cdot B$, $A:B$

ΘΕΜΑ 11°

Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω πολυώνυμα

i. $2a\beta + 3a^2$

ii. $4a^3 - 8a$

iii. $10\kappa^2 - 1000\lambda^2$

iv. $5\mu^2 + 10\mu\lambda$

v. $x(x-3) + 2(3-x)$

vi. $a\beta + \beta x + a + \gamma a + \gamma x + x$

vii. $25\beta^2 - 4$

viii. $(x + \psi)^2 - 1$

ix. $a^2 - (a+2\beta)^2$

ΘΕΜΑ 12°

Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(x^2 + 4)(y^2 + 1) - (xy + 2)^2 = (2y - x)^2$.

ΘΕΜΑ 13°

Αν είναι $A = \left(\frac{x}{y} - 1\right) \cdot \left(\frac{x}{y} + 1\right)$ και $B = \frac{x^2}{x^2 - y^2} - 1$, να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$

ΘΕΜΑ 14°

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{2}{x^2 - 3x} + \frac{x}{2x - 6} = \frac{5}{2x},$$

$$\text{ii)} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+1} = \frac{12}{x^2 - x - 2},$$

$$\text{iii)} (x+1)^2 + 2(x+5)^2 = 3x(x+3) - 1,$$

$$\text{iv)} 7x^2 + 10 = (5x-2)(3x+7) - (2x+11)(4x-1),$$

$$\text{v)} (x-2)(x+3)(3x-9) = 0.$$

ΘΕΜΑ 15°

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{a^2 + a + 1}{a^4 - a} \div \frac{a}{a-1}$ αν $\alpha = \frac{1}{2012}$

ΘΕΜΑ 16°

Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{3x}{2} + \frac{\psi}{5} = 6$$

$$\frac{x+2}{4} - \frac{\psi-3}{6} = 2$$

ΘΕΜΑ 17°

α) Να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις:

$$A = x^3 + 4x^2 + 4x, \quad B = x^2 - 4, \quad \Gamma = x^2 - 2x$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{A} + \frac{2}{B} = \frac{1}{\Gamma}.$

ΘΕΜΑ 18°

Να λυθεί η κλασματική εξίσωση: $\frac{4}{x^2 + 2x - 3} - \frac{x+1}{2-2x} = \frac{x+2}{x+3}$

ΘΕΜΑ 19°

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

$$\alpha) \sqrt{7 - \sqrt{40}}$$

$$\beta) \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$$

ΘΕΜΑ 20°**Να γίνουν γινόμενοι οι παραστάσεις**

$$\begin{array}{lll}
9\psi^2 + 12\psi + 4 & \alpha^6 - 6\alpha^3 + 9 & \frac{\chi^2}{16} + \frac{\chi\psi}{10} + \frac{\psi^2}{25} \\
\chi^4 - 10\chi^2 + 25 & \chi^2\psi^2 - 8\chi\psi + 16 & \frac{\chi^2}{25} + \frac{2\chi}{15} + \frac{1}{9} \\
\chi^2 - \chi + \frac{1}{4} & 4\chi^2 + 28\chi\psi + 49\psi^2 & 25(x + \psi)^2 + 20(\chi + \psi) + 4 \\
-\chi^2 + 4\chi - 4 & 4\chi^6 - 4\chi^3 + 1 & \\
4\chi^2 - 4\chi + 1 & &
\end{array}$$

ΘΕΜΑ 21°

Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{2}$ **να υπολογίσετε την παράσταση** $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3}$

ΘΕΜΑ 22°**Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παραινομαστές σε ισοδύναμα**

κλάσματα με ρητούς παραινομαστές i) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ii) $\frac{17}{1 - 3\sqrt{2}}$ iii) $\frac{3}{\sqrt{2} + 1}$

ΘΕΜΑ 23°**Να αποδείξετε τις ισότητες**

$$\begin{array}{l}
(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 - 6\alpha^2\beta = 2\beta^3 \\
2\alpha(2\alpha - 1)^2 - (2\alpha - 1)^3 - 4\alpha^2 = 1 - 4\alpha \\
(\alpha^2 - 1)^3 - \alpha^2(\alpha^2 + 1)^2 = \alpha^2(2 - 5\alpha^2) - 1 \\
(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (2\alpha - \beta)(2\alpha + \beta) + 3\alpha^2 = 0 \\
(\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha - \beta + \gamma)^2 = 4\beta(\alpha + \gamma) \\
(\chi^2 - \chi - 1)^2 - (\chi - 1)^2(\chi + 1)^2 = -\chi(2\chi^2 - \chi - 2) \\
(\chi + 2\psi)^2 - (\psi - 2\chi)(\psi + 2\chi) + (2\chi - \psi)^2 = 9\chi^2 + 4\psi^2 \\
\left(\frac{\chi + \psi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\chi - \psi}{2}\right)^2 = \frac{\chi^2 + \psi^2}{2} \\
\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20 \\
(x - 1)^3 + 3(x - 2)(x + 2) - (x^3 - 13) \\
(x - 2)^3 - 3(x - 2)(x + 2) - x^2(x - 9) \\
\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta
\end{array}$$

ΘΕΜΑ 24°

$$\text{Av } x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\alpha) \text{ Να δειχθεί } x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\beta) \text{ Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης } \left(3x + \frac{2}{x}\right)^2 + \left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 + 4x + \frac{4}{x} =$$

ΘΕΜΑ 25°

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$\frac{6\alpha + 6}{3\alpha^2 6\alpha + 3}$	$\frac{1 - \chi^2 + \chi^3 - \chi^5}{1 + \chi - \chi^2 - \chi^3}$
$\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$	$\frac{\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta}{\alpha^2 + \beta\gamma}$
$\frac{\chi^2 - (2\chi - 3)^2}{\chi^2 - 1}$	$\frac{\omega^3 - 2\omega^2 + \omega}{\omega^3 - \omega}$
$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma}$	$\frac{\chi^2 + 3\chi + 2}{\chi^2 + 4\chi + 4}$
$\frac{\chi^3 + 2\alpha\chi^2 + \alpha^2\chi}{3\alpha\chi^2 - 3\alpha^3}$	$\frac{\chi^2 - 5\chi + 4}{\chi^2 - 6\chi + 8}$

ΘΕΜΑ 26°

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$\frac{3\chi - 6}{\chi^3} \cdot \frac{\chi^2}{2 - \chi} =$	$\frac{\chi^{\nu+1} - \chi^{\nu}}{8\chi^2 - 12\chi} \cdot \frac{4\chi^2 - 6\chi}{\chi^{\nu+1} + 2\chi^{\nu}} =$
$\frac{\chi^2 - 7\chi}{3\chi - 15} \cdot \frac{\chi^2 - 10\chi + 25}{\chi^2 - 49} =$	$\frac{10\chi^2 - 5\chi}{1 + 4\chi + 4\chi^2} : \frac{25\chi}{2 - 8\chi^2} =$
$\frac{2\chi + 3\psi}{\chi - \psi} \cdot \frac{\psi^2 - \chi^2}{9\psi^2 - 4\chi^2} =$	$(\chi - 1) \cdot \frac{3\chi + 6}{\chi + 1} : \left(\frac{2\chi + 2}{3 - 3\chi}\right)^{-1} =$
$\frac{1 - 4\chi + 4\chi^2}{\chi^2 - 4} : \frac{2\chi - 1}{\chi + 2} =$	$\frac{\alpha^2 - 4\chi^2}{\alpha^2 + 4\alpha\chi} : \frac{\alpha^2 - 2\alpha\chi}{\alpha\chi + 4\chi^2} =$

ΘΕΜΑ 27°

Av $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \quad \beta) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \quad \gamma) \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} =$$

ΘΕΜΑ 28°

Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{\beta}{\alpha + \gamma} - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = 0$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

ΘΕΜΑ 29°

Αν δύο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12

ΘΕΜΑ 30°

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

$$\frac{\chi + \frac{12}{\chi - 7}}{\chi - 3} = \frac{\frac{\chi^{-1} - 1}{1 - \chi^{-2}}}{\frac{\chi^2 + 1}{\chi} - 2} = \frac{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}}{\chi - \frac{\chi}{1 - \chi^{-1}}} =$$
$$\frac{\frac{2}{\chi} + \frac{1}{\chi + 1}}{3\chi + 2} = \frac{\frac{\chi}{1 - \frac{1}{\chi}}}{\chi} =$$

ΘΕΜΑ 31°

Αν $P(\chi) = 2\chi^2 - \chi - 1$ και $Q(x) = 3x - 2$, να βρείτε τα πολυώνυμα

$$\alpha. P(x) \cdot Q(x) \quad \beta. P(x) \cdot [Q(x) - 3x(x+1)] \quad \gamma. [P(x) - 1] \cdot [Q(x) - x]$$

ΘΕΜΑ 32°

Να γίνουν οι πράξεις

$$1 - 2\chi(3\chi - 1) - (5\chi - 2)(\chi + 3) =$$
$$2\chi^3 - 2\chi(\chi - 1)(\chi - 2) + (\chi + 1)(3\chi - 1) =$$
$$3 + (2\chi - 1)(-3\chi + 1) - (3\chi - 2)(\chi - 1) =$$

ΘΕΜΑ 33°

Με ποιο πολυώνυμο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το διώνυμο $2x - 3$, ώστε το γινόμενο τους να είναι το τριώνυμο $2x^2 - x - 3$

ΘΕΜΑ 34°

Έστω οι ετικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\sqrt{\beta^2 + \gamma \sqrt{\alpha^2 - \beta \sqrt{\beta \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}}} - \alpha$

ΘΕΜΑ 35°

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{15 + \sqrt{100}}}}} \sqrt{18} \quad B = \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\sqrt{12} \sqrt{\sqrt{9}} \sqrt{1,5}}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°

A) Εστω η εξίσωση $x^2 + kx = 8$ $k \in \mathbb{R}$ που έχει λύση το $x = -4$

I) Να βρείτε το k

II) Να λύσετε την εξίσωση

B) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό 8m^2 .

Η μια του διάσταση είναι κατά 2m μεγαλύτερη από την άλλη.

Με τη βοήθεια της κατάλληλης εξίσωσης να βρείτε τις διαστάσεις του

ΘΕΜΑ 2°

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει: $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, να αποδείξετε ότι:

A. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ B. $\epsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$ Γ. $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu 120^\circ}{\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi 135^\circ} = \frac{3}{70}$

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διαμέσοί του $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$. Αν K είναι το σημείο τομής των διαμέσων, τότε να αποδείξετε ότι:

A. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\epsilon$ είναι ίσα.

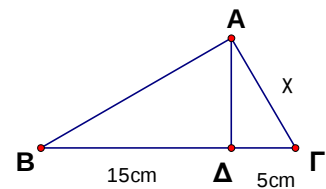
B. Το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 30^\circ$. Παίρνουμε επί της $B\Gamma$ σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = 15\text{cm}$, $\Delta\Gamma = 5\text{cm}$ και $\hat{\Delta A\Gamma} = 30^\circ$.

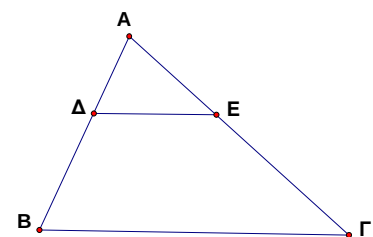
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια.

β) Να δείξετε ότι ισχύει $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$.



ΘΕΜΑ 5°

Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $A\Delta = 3$, $AB = x$, $AE = x + 1$ και $E\Gamma = 4$. Να υπολογίσετε το μήκος x και μετά τα τμήματα AE και ΔB .

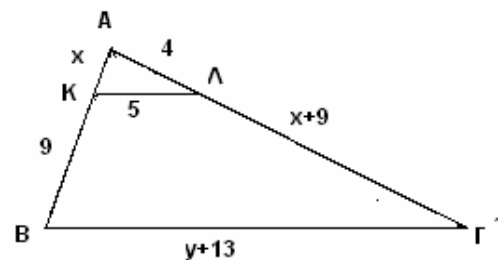


ΘΕΜΑ 6°

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $K\Lambda$ παράλληλη της $B\Gamma$, $AK = x$, $A\Lambda = 4\text{ cm}$, $K\Lambda = 5\text{ cm}$, $KB = 9\text{ cm}$, $A\Gamma = x + 9\text{ cm}$ και $B\Gamma = y + 13\text{ cm}$.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων x και y .



ΘΕΜΑ 7°

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) είναι $\hat{A}=50^\circ$. Να βρεθούν οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 8°

Να δείξετε ότι: i) τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου ,
ii) τα μέσα των πλευρών ισοπλεύρου τριγώνου είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου .

ΘΕΜΑ 9°

Από τυχαίο σημείο M της διχοτόμου Oz μιας γωνίας $x\hat{O}y$ φέρνουμε κάθετη προς τη διχοτόμο που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία K και Λ . Να δείχθεί ότι ισχύει $OK=OL$ και $MK=ML$.

ΘΕΜΑ 10°

Να γράψετε δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ που έχουν κοινή κορυφή το A και ίσες τις γωνίες της κορυφής . Να δείχθεί ότι $BK=\Gamma\Lambda$.

ΘΕΜΑ 11°

Στις ίσες πλευρές OA και OB ενός ισοσκελούς τριγώνου OAB παίρνουμε ίσα τμήματα OG και OD αντίστοιχα. α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OAD και OBG όπως και τα $AB\Gamma$ και $BA\Delta$ β) Αν I το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$ να δείξετε ότι το τρίγωνο IAB είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 12°

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τη διάμεσο AK και τις $B\Delta \perp AK$ και $\Gamma E \perp AK$. Να δείξετε ότι είναι $B\Delta = \Gamma E$.

ΘΕΜΑ 13°

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και AB τυχαία χορδή του. Αν από το μέσο K του τόξου AB φέρουμε τη $K\Delta \perp OA$ να δείχθεί ότι $2K\Delta = AB$.

ΘΕΜΑ 14°

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η KM διχοτομεί τη διάμεσο AL .

ΘΕΜΑ 15°

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε το ύψος του AK . Αν Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι το ΔEKZ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 16°

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ να φέρετε τη διάμεσο $A\Delta$ και από τα μέσα E και Z των τμημάτων ΔB και $\Delta \Gamma$ να φέρετε παράλληλες προς τη διάμεσο $A\Delta$ που τέμνουν τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα H και Θ . Να δείξετε ότι $H\Theta = \frac{1}{2} B\Gamma$.

ΘΕΜΑ 17°

Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{2}{\eta\mu\omega} = \frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

ΘΕΜΑ 18°

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha=10 \text{ cm}$, $\beta=10\sqrt{3} \text{ cm}$ και $A=30^\circ$. Να βρεθούν οι άλλες γωνίες και η πλευρά γ του τριγώνου.

ΘΕΜΑ 19°

Να αποδείξετε ότι: $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 2$.

ΘΕΜΑ 20°

Να αποδείξετε ότι: $(\kappa\eta\mu\alpha + 3\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (3\eta\mu\alpha - \kappa\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \kappa^2 + 9$.

ΘΕΜΑ 21°

Αν $\epsilon\phi\chi = -2$ και $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 5\sigma\upsilon\nu^4\chi - 2\eta\mu^3\chi .$$

ΘΕΜΑ 22°

Αν $\eta\mu\chi = \frac{3}{5}$ και $90^\circ \leq \chi \leq 180^\circ$,

α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\chi$ και την $\epsilon\phi\chi$.

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = (\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)\epsilon\phi\chi$

ΘΕΜΑ 23°

Αν $\epsilon\phi\chi = -1$ και $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$,

α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\chi$ και το $\eta\mu\chi$.

β) Να γραφεί σαν μια δύναμη η τιμή της παράστασης: $A = \frac{(\epsilon\phi\chi)^{2001}}{(\eta\mu\chi)^{2001} \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi)^{2001}}$.

ΘΕΜΑ 24°

Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{4}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$,

α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\theta$ και την $\epsilon\phi\theta$.

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{\epsilon\phi\theta}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}$

ΘΕΜΑ 25°

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ ισχύει $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ και $A\Gamma = 9$. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ.

ΘΕΜΑ 26°

Να αποδείξετε τις παραπάνω ταυτότητες:

$$\alpha) \frac{1}{1-\eta\mu\alpha} + \frac{1}{1+\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \epsilon\phi\chi$$

$$\gamma) \epsilon\phi\omega + \frac{1}{\epsilon\phi\omega} = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\delta) \frac{1+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}$$

ε)

$$1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1+\eta\mu\alpha} = \eta\mu\alpha$$

$$\sigma\tau) \frac{1-\epsilon\phi^2\omega}{\epsilon\phi\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}$$

ΘΕΜΑ 27°

Μια ομάδα ορειβατών παρατήρησε την κορυφή Κ ενός κατακόρυφου βράχου από το σημείο Α της οριζόντιας επιφάνειας του εδάφους με γωνία ύψους 30° . Στη συνέχεια προχώρησε 120 μέτρα προς το βράχο στο σημείο Β και παρατήρησε την κορυφή με γωνία ύψους 40° . Να υπολογίσετε την ΚΒ και το ύψος του βράχου.

ΘΕΜΑ 28°

Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\frac{\eta\mu(180-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90-\phi) \cdot \epsilon\phi(180-\alpha)}{\epsilon\phi\alpha \cdot \eta\mu(180-\phi) \cdot \eta\mu\alpha}$

(Θυμηθείτε τι ισχύει για τις παραπληρωματικές και τις συμπληρωματικές γωνίες).

ΘΕΜΑ 29°

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = \frac{2-2\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$, $B = \frac{\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}$

$$\Gamma = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2, \quad \Delta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 + \epsilon\phi^2\alpha)$$

ΘΕΜΑ 30°

Να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 120^\circ \eta\mu 150^\circ \eta\mu 135^\circ, \quad B = \sigma\upsilon\nu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ \sigma\upsilon\nu 135^\circ, \quad \Gamma = \eta\mu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ \epsilon\phi 135^\circ$$

$$\Delta = \eta\mu 150^\circ \sigma\upsilon\nu 135^\circ \epsilon\phi 120^\circ, \quad E = \eta\mu 135^\circ \sigma\upsilon\nu 120^\circ \epsilon\phi 150^\circ,$$

$$Z = \eta\mu 120^\circ \eta\mu 135^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 135^\circ \epsilon\phi 45^\circ$$



4

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ..... ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται μονώνυμο και από ποια μέρη αποτελείται;
- B. Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια;
- Γ. Τι λέγεται πολυώνυμο;

ΘΕΜΑ 2^ο

- A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$

β. $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

γ. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

- B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

- A. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.
- B. Τι λέγεται παραγοντοποίηση;
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
 - α. Ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
 - β. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δύο άνισες ρίζες αν $\Delta = 0$.
 - γ. Το πολυώνυμο $P(x) = 2010$ είναι μηδενικού βαθμού.
 - δ. Η εξίσωση $5x = 0$ είναι αδύνατη.
 - ε. Κλασματική λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα.

ΘΕΜΑ 4^ο

- A. Να αντιστοιχίσετε τις ταυτότητες της στήλης Α με τα αντίστοιχα αναπτύγματα της στήλης Β. Η αντιστοίχιση να γραφτεί στην κόλλα σας, γράφοντας δίπλα στο γράμμα της στήλης Α τον αριθμό που αντιστοιχεί στη στήλη Β, ως εξής:

$A \rightarrow$, $B \rightarrow$, $\Gamma \rightarrow$, $\Delta \rightarrow$

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
A. $(\alpha + \beta)^3$	1. $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
B. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	2. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Γ. $(\alpha - \beta)^2$	3. $\alpha^3 + \beta^3$
Δ. $\alpha^3 - \beta^3$	4. $\alpha^2 - \beta^2$
	5. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
	6. $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

- B. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ΘΕΜΑ 5^ο

- A. Να δώσετε τον ορισμό της ταυτότητας.
- B. Να συμπληρώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε την ταυτότητα:
 $(\alpha + \beta)^3 = \dots$
- Γ. Να χαρακτηρίσετε σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω σχέσεις:
- α. $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$
- β. $(-\alpha - \beta)^2 = -(\alpha + \beta)^2$
- γ. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

Να γράψετε τον τύπο της διακρίνουσας $\Delta = \dots\dots\dots$

- α. Πότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις; Γράψτε τον τύπο των λύσεων.
- β. Πότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση; Γράψτε τον τύπο της.
- γ. Πότε η εξίσωση είναι αδύνατη;

ΘΕΜΑ 7^ο

- A.** Ποια είναι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο;
- B.** Ποια παράσταση ονομάζουμε διακρίνουσα;
- Γ.** Να αντιστοιχίσετε τα ερωτήματα της στήλης (A) με τις απαντήσεις της στήλης (B) στον παρακάτω πίνακα γνωρίζοντας ότι αναφέρονται σε εξίσωση 2^{ου} βαθμού:

Στήλη A Διακρίνουσα	Στήλη B Λύσεις εξίσωσης
A. $\Delta > 0$	α. Διπλή λύση
B. $\Delta < 0$	β. Αόριστη
Γ. $\Delta = 0$	γ. Αδύνατη
	δ. Δύο λύσεις άνισες

Μία απάντηση της στήλης (B) περισσεύει.

ΘΕΜΑ 8^ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

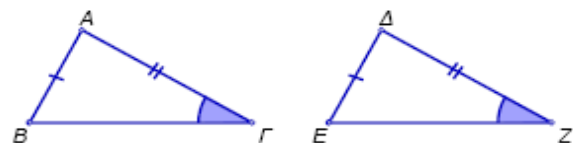
- A.** Το άθροισμα μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- B.** Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- Γ.** Το πηλίκο μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- Δ.** Το μηδενικό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
- Ε.** Το σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
- ΣΤ.** Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο μ' αυτά.

ΘΕΜΑ 9^ο

- A.** Πότε λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα; (ορισμός)
- B.** Γράψτε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

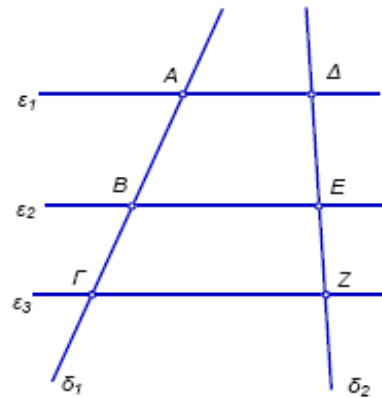
Είναι τα $\hat{A}B\Gamma$ και $\hat{A}E\Delta$ ίσα;

(δικαιολογήστε την απάντησή σας)



ΘΕΜΑ 10^ο

- A.** Να διατυπώσετε την πρόταση που είναι γνωστή ως θεώρημα του Θαλή.
- B.** Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή.
- Γ.** Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;



ΘΕΜΑ 11^ο

- A.** Να διατυπωθεί το Θεώρημα του Θαλή και σε σχήμα να γραφούν οι σχέσεις που το εκφράζουν.
- B.** Σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουμε:
- $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \hat{B} = \hat{B}'$
 - $\alpha = \alpha', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}', \hat{B} = \hat{B}'$
 - $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
 - $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Σε ποιες περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι ίσα και γιατί;

ΘΕΜΑ 12^ο

- A.** Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστή ή Λάθος δίπλα στον αριθμό της κάθε ερώτησης.
- Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
 - Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
 - Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν δύο γωνίες και δύο πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία.
- B. α.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.
- β.** Αν είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία A, B, Γ , και A', B', Γ' , αντίστοιχα γράψτε την επόμενη ισότητα ορθά συμπληρωμένη: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

ΘΕΜΑ 13^ο

- A. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- B. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
- β. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
- γ. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΘΕΜΑ 14^ο

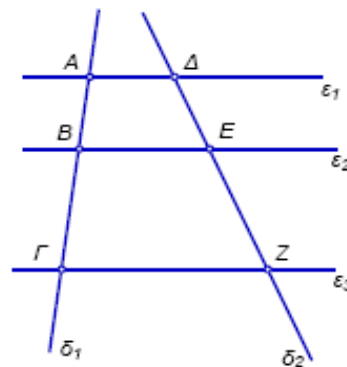
- A. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή (σχήμα)
- B. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$.

Να συμπληρώσετε τις αναλογίες:

♦ $\frac{AB}{B\Gamma} = \dots\dots\dots$

♦ $\frac{A\Gamma}{AB} = \dots\dots\dots$

♦ $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \dots\dots\dots$



ΘΕΜΑ 15^ο

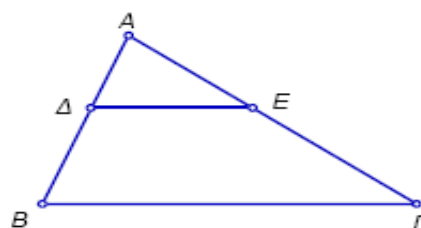
- A. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή (σχήμα – αναλογία).
- B. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι Σωστές και ποιες Λάθος;

α. $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$

β. $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Gamma}{AE}$

γ. $\frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{A\Delta}{AE}$

δ. $\frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$



ΘΕΜΑ 16^ο

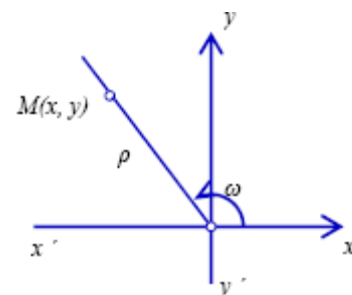
- A. Να διατυπώσετε το θεώρημα που αναφέρεται σε ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών.
- B. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.
- Γ. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων τριγώνων.

ΘΕΜΑ 17^ο

- A. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.
- B. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν:
 - α. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
 - β. $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

ΘΕΜΑ 18^ο

- A. Στο διπλανό σχήμα δίνεται σημείο $M(x, y)$ τέτοιο ώστε να είναι $\widehat{xOM} = \hat{\omega}$ και $OM = \rho$. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και να γράψετε τη σχέση του ρ με τις συντεταγμένες του σημείου M .
- B. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει η ισότητα:
 $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$



ΘΕΜΑ 19^ο

- A. Να αποδείξετε τη σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (να γίνει σχήμα).
- B. Ο τύπος $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ισχύει για τις γωνίες των 0° , 90° και 180° ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Γ. Να γράψετε τους τύπους που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών.

ΘΕΜΑΤΑ..... ΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα:

$$(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 - (2x - 1) \cdot (4x - 3) + x^2 \cdot (x - 1) = (x - 2)^3 - 10x + 2$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (x + 2)^2 - 4(x + 5)$ και $B = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} : \frac{1}{6x - 6}$

- A. Να αποδείξετε ότι: $A = x^2 - 16$
B. Να αποδείξετε ότι: $B = 6x$
Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $A + B = 0$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2 - 2\alpha\beta}$

ΘΕΜΑ 4^ο

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$A = \frac{x^4 + 8x}{2x^4 - 4x^3 + 8x^2} \text{ και } B = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}$$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $A - B = 1$.

ΘΕΜΑ 5^ο

A. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 4x + 4} \text{ και } B = \frac{4x^2 - 8x}{2x^2 - 8}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση: $B - A = 0$

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 4 - x^2$$

$$B = x^2 + 4x + 4$$

$$\Gamma = x^2 - x - 2$$

A. Να παραγοντοποιηθούν οι παραπάνω παραστάσεις.

B. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{\Gamma} = 0$

ΘΕΜΑ 7^ο

Να παραγοντοποιήσεις το πολυώνυμο:

$$x^2 - 10x + 25 - \omega^2 =$$

ΘΕΜΑ 8^ο

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: $A = -7x + 7$ και $B = x^3 - x$.

Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{A}{B}$.

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{A}{B} = -\frac{7}{2}$.

ΘΕΜΑ 9^ο

A. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x} \text{ και } B = \frac{2x}{x^2 - 2x}$$

B. Να λυθεί η εξίσωση: $A + B = \frac{4}{x^2 - 2x}$,

όπου A και B οι απλοποιημένες παραστάσεις του α ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 10^ο

A. Να παραγοντοποιηθούν και να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 4x}$$

$$B = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\Gamma = \frac{4x}{x^3 - 2x^2}$$

B. Να λυθεί η εξίσωση: $A + B = \Gamma$ όπου A, B και Γ οι απλοποιημένες παραστάσεις του πρώτου ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 11^ο

Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση:

$$(2x + 3)^2 + x(x - 2)^2 - (2x - 1)(2x + 1)$$

ΘΕΜΑ 12^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A(x) = x(x - 2) + 1 + (2 - x)^2 - [x(x - 4) + 4] \text{ και}$$

$$B(x) = x^2(x + 5) - (x + 5).$$

A. Να αποδείξετε ότι $A(x) = x^2 - 2x + 1$.

B. Να παραγοντοποιήσετε τα A(x) και B(x) και να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \text{ δείχνοντας ότι ισούται με } \frac{x-1}{(x+5)(x+1)}.$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma(x) = 1$ δείχνοντας ότι οι ρίζες της είναι το -2 και το -3.

ΘΕΜΑ 13^ο

A. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις:

α. $9x^2 - 16$

β. $4x^2 + 4x + 1$

γ. $xy + x^2 - x - y$

δ. $x^2 + 3x + 2$

ε. $1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$

B. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{1}{x+1}$

ΘΕΜΑ 15^ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{10-3x-6x^2}{x^2-4} + \frac{2x^2-3}{x-2} - \frac{2x^2}{x+2} = 0$$

ΘΕΜΑ 16^ο

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2-1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2+x}$$

ΘΕΜΑ 17^ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$9(x+2)^2 - 18(2x+3) = 8x + 14 + 4x(2x-1).$$

ΘΕΜΑ 18^ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2}{4-x} = \frac{x}{x^2-7x+12}$$

ΘΕΜΑ 19^ο

Να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{x-3}{x+2} - \frac{2x^2-11x-10}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$$

ΘΕΜΑ 20^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $x^3 + ax^2 + bx - 6$.

Να βρείτε τα a, β αν η αριθμητική τιμή του

για $x = -1$ είναι 0 και για $x = 3$ είναι 24.

ΘΕΜΑ 21^ο

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-(x+1)}{x^2-9}$$

ΘΕΜΑ 22^ο

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-10}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{x+2}{2-x}$.

ΘΕΜΑ 23^ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$2(y+x) - 3(y-3) = x - 2y + 11$$

$$\frac{2x+y}{3} = y + x - 3$$

ΘΕΜΑ 24^ο

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3x+2y}{2} = \frac{x+4y}{6} + y + 2 \\ 2x - \frac{x+y}{3} = \frac{x+5}{2} \end{cases}$$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα που βρήκατε.

ΘΕΜΑ 25^ο

Έστω το σύστημα:

$$2x + 3y = 3\alpha + \beta$$

$$x - 2y = \alpha + 2\beta$$

Να προσδιοριστούν τα α, β αν το (Σ) έχει λύση $(x, y) = (2, 3)$.

ΘΕΜΑ 27^ο

...

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + 6 = x - y \\ y + \frac{y-2x}{3} = -4 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 28^ο

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} = -1 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 29^ο

A. Να λύσετε το σύστημα:

$$x - 5y = 5$$

$$2x + y = 54$$

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \sqrt{4 + \sqrt{x}} + \sqrt{14 + \sqrt{y}} - \sqrt{xy}$

όπου (x, y) η λύση του συστήματος του ερωτήματος A.

ΘΕΜΑ 30^ο

Δίνεται το ακόλουθο σύστημα:
$$\begin{cases} (2x+3)(x-1) - y = 2x^2 + 1 \\ x - (y-2)^2 = -y^2 + 20 \end{cases}$$

A. Να αποδείξετε ότι μετά από πράξεις γράφεται στη μορφή:
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 4y = 24 \end{cases}$$

B. Να λύσετε το σύστημα στη νέα μορφή.

ΘΕΜΑ 31^ο

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 31^ο

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = 6 - \frac{y}{5} \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 32^ο

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2 \cdot (5x+3y) - 5 \cdot (x-2y) = 22 \\ 4x - 3y = 5x - 8y + 12 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 33^ο

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{x-y}{2} = -\frac{2}{3} \\ 3(x-2) - 2(y-1) = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 34^ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{y-1}{2} - \frac{x+2}{6} = \frac{y}{6} - \frac{1}{3} \\ 3x - 2(y-1)^2 - (x-2) \cdot (x+2) = 2y^2 - x^2 + 1 \end{cases}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 35^ο

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = -2 \cdot \eta\mu 30^\circ + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu 60^\circ$$

$$B = 5 \cdot (\eta\mu 70^\circ \cdot \eta\mu 110^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 110^\circ)$$

A. Δείξτε ότι $A = 3$, $B = 5$

B. Εάν $\eta\mu\omega = \frac{A}{B}$, όπου A, B οι τιμές του (α) ερωτήματος και ω αμβλεία, βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

Γ. Υπολογίστε την παράσταση:
$$K = \frac{5 \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) - 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}{\frac{4}{3} \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \omega)}$$

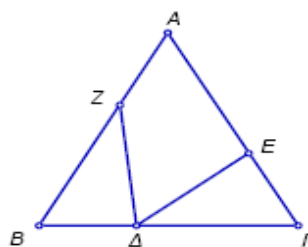
ΘΕΜΑ 36^ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $B\Delta$, στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα ΓE και στην πλευρά AB παίρνουμε τμήμα AZ , ώστε $B\Delta = \Gamma E = AZ$.

Να δείξετε ότι:

A. Τρίγωνο $B\Delta Z$ = Τρίγωνο $\Delta E\Gamma$

B. $\Delta Z = \Delta E$.



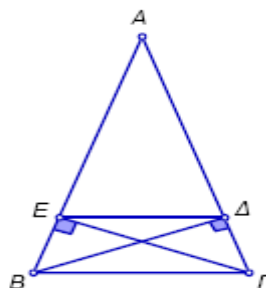
ΘΕΜΑ 37^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της βάσης $B\Gamma$, φέρνουμε τα τμήματα $M\Delta \perp AB$

και $M E \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

A. $M\Delta = M E$

B. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



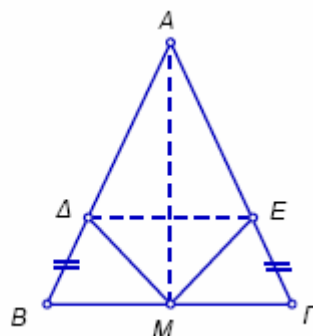
ΘΕΜΑ 38^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνω τη βάση $B\Gamma$ και από τις δύο μεριές και παίρνω τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Αν M, N είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ναδειχθεί ότι $\Delta N = ME$. Αν η ΔN και η ME τέμνονται στο K και φέρω την KZ κάθετη στην ΔE , ναδειχθεί ότι: το Z είναι μέσον της ΔE .

ΘΕΜΑ 39^ο

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Αν είναι $B\Delta = \Gamma E$, να αποδείξετε ότι:

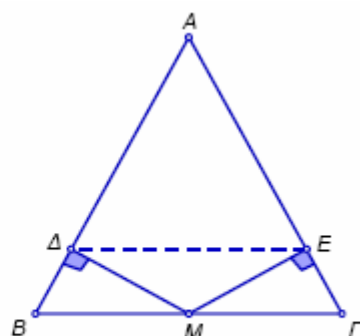
- A. το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές
- B. τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEM είναι ίσα.



ΘΕΜΑ 40^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Από το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ φέρνουμε τις κάθετες $M\Delta \perp AB$ και $ME \perp A\Gamma$.

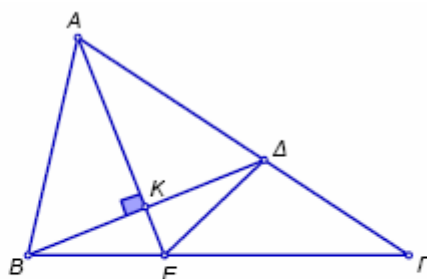
- A. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ και να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.
- B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 41^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας A και από την κορυφή B φέρνουμε τη BK κάθετη στη διχοτόμο $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

- A. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
- B. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

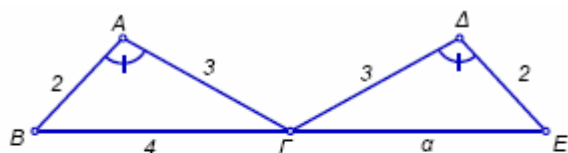


ΘΕΜΑ 42^ο

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:

- Α. να αναφέρετε το κριτήριο βάσει του οποίου τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα
Β. να βρείτε το μήκος α της πλευράς ΓΕ
Γ. αν $a = 4$ να απλοποιήσετε την παράσταση Κ αφού πρώτα παραγοντοποιήσετε τον αριθμητή της :

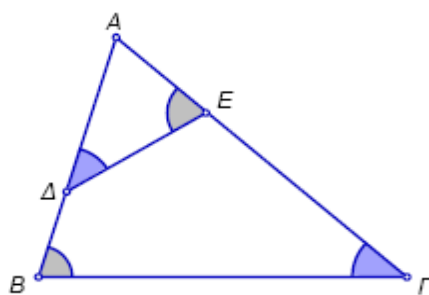
$$K = \frac{x(x-5) + a + 2}{x^2 - 9}.$$



ΘΕΜΑ 43^ο

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\widehat{ABG} = \widehat{AED}$, $\widehat{ADE} = \widehat{AGB}$ και $AB = 6\text{cm}$, $AG = 10\text{cm}$, $BG = 12\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.
β. Να γραφούν οι ίσοι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών.
γ. Να υπολογιστούν τα ΑΕ και ΔΕ.

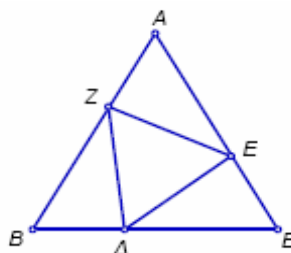


ΘΕΜΑ 44^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Προεκτείνω τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα κατά ίσα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ, να δείξετε ότι $M\Delta = ME$.

ΘΕΜΑ 45^ο

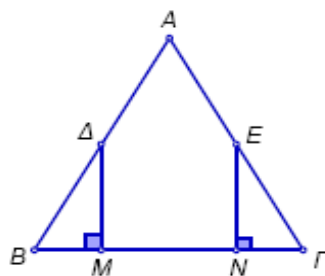
Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ κάθε πλευρά είναι 8cm και τα ΑΖ, ΒΔ, ΓΕ είναι 3cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



ΘΕΜΑ 46^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).
Από τα μέσα Δ και E των AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα φέρνουμε ΔM και EN κάθετα στη $B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

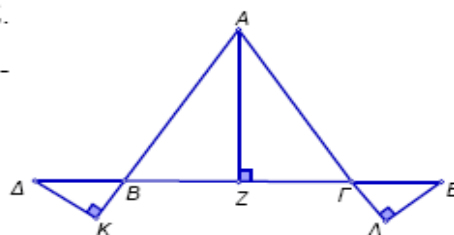
- A. Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $EN\Gamma$ είναι ίσα.
- B. Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.



ΘΕΜΑ 47^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ , E έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.
Αν είναι $\Delta K \perp AB$, $E\Lambda \perp A\Gamma$ και $AZ \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

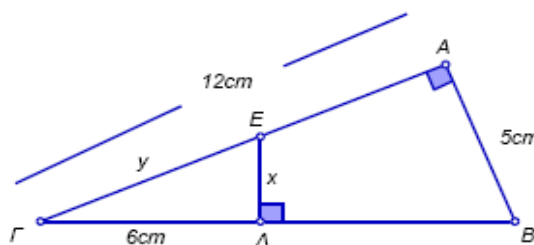
- A. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- B. Τα τρίγωνα $B\Delta K$ και $\Gamma E\Lambda$ είναι ίσα.
- Γ. Τα τρίγωνα $BK\Delta$ και ABZ είναι όμοια και να γράψετε τους αντίστοιχους λόγους ομοιότητας.



ΘΕΜΑ 48^ο

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 5\text{cm}$,
 $A\Gamma = 12\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 6\text{cm}$.

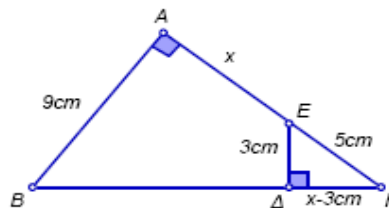
- A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
- B. Να υπολογίσετε τα x , y και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.
- Γ. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των δύο τριγώνων.



ΘΕΜΑ 49^ο

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνια με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{E}\Delta\Gamma = 90^\circ$. Επίσης δίνονται $AB = 9\text{cm}$, $E\Delta = 3\text{cm}$, $E\Gamma = 5\text{cm}$, $AE = x$ και $\Delta\Gamma = x - 3$.

- A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια.
- B. Να υπολογίσετε το x .
- Γ. Να υπολογίσετε την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



ΘΕΜΑ 50^ο

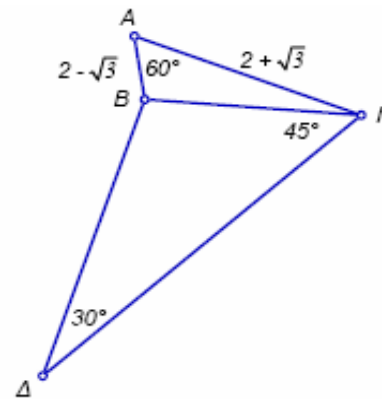
Στο παρακάτω σχήμα είναι:

$$AB = \sqrt{3} - \sqrt{2}, AG = \sqrt{3} + \sqrt{2},$$

$$\hat{A} = 60^\circ, \hat{\Delta} = 30^\circ \text{ και } \widehat{B\Gamma\Delta} = 45^\circ.$$

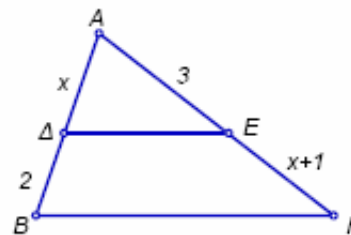
A. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 3$

B. Να υπολογίσετε τη $B\Delta$.



ΘΕΜΑ 51^ο

Στο διπλανό σχήμα (σκαρίφημα) να βρεθεί το x αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\Delta E \parallel B\Gamma$.

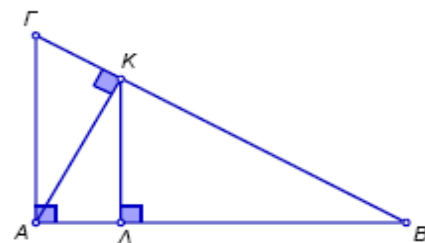


ΘΕΜΑ 52^ο

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AK προς την υποτείνουσα. Από το K φέρνουμε την $K\Lambda$ κάθετη στην AB . Να αποδείξετε:

A. ότι τα τρίγωνα $AK\Gamma$, $AK\Lambda$ είναι όμοια και

B. ότι $AK^2 = A\Gamma \cdot K\Lambda$.



ΘΕΜΑ 53^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια. Αν $A\Gamma = 4$ cm και $B\Gamma = 5$ cm, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

ΘΕΜΑ 54^ο

Αν για μία γωνία ω δίνεται $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\eta_{\omega} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, να υπολογιστούν το $\sin \omega$ και η $\cos \omega$.

ΘΕΜΑ 55^ο

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$ να υπολογίσετε:

Α. το $\sigma\upsilon\nu\omega$, Β. την $\epsilon\phi\omega$, Γ. την τιμή της παράστασης $A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\omega - 2\sigma\upsilon\nu 120^\circ}{5\epsilon\phi\omega}$

ΘΕΜΑ 56^ο

Έστω γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

Α. Η γωνία ω είναι οξεία ή αμβλεία; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ β. $\epsilon\phi\omega = -\frac{4}{3}$

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{\epsilon\phi\omega - \sigma\upsilon\nu 120^\circ}{\eta\mu\omega - \epsilon\phi 135^\circ}$.

ΘΕΜΑ 57^ο

Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

Α. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$B = 10\sigma\upsilon\nu\omega - 8\epsilon\phi\omega + 5\eta\mu(180^\circ - \omega).$$

ΘΕΜΑ 58^ο

Αν για την οξεία γωνία ω γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$10 \cdot \eta\mu\omega - \frac{5}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 12 \cdot \epsilon\phi\omega$$

ΘΕΜΑ 59^ο

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \epsilon\phi 150^\circ =$$

$$B = \frac{\eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ}{\epsilon\phi 150^\circ}$$

ΘΕΜΑ 60^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Αν M μέσο της $B\Gamma$ και P και N μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

A. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα BMP και $MN\Gamma$ είναι ίσα.

B. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $MN\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

Γ. Αν $\omega = \widehat{NM\Gamma}$ και $\text{syn}\omega = \lambda + \frac{3}{10}$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\text{syn}\omega + \eta\mu(180^\circ - \Gamma) - \epsilon\phi\omega}{\epsilon\phi\omega - \text{syn}(180^\circ - B)} = \frac{13}{31}$.



5

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑΤΑ

ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ : 1. Να διατυπώσετε την πρόταση του θεωρήματος του Θαλή κάνοντας και το αντίστοιχο σχήμα .

2. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1. Αν $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

2. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{aligned} 2x + 3\psi &= -5 \\ 5x + \psi &= 7 \end{aligned}$$

3 . Να λυθεί η εξίσωση:

$$2x^2 - 14x + 20 = 0$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Από τα **δύο** θέματα θεωρίας να απαντήσετε μόνο το **ένα** και από τις **τρεις** ασκήσεις μόνο τις **δύο**.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ

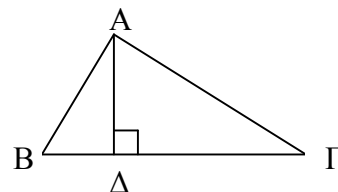
Απολυτήριων εξετάσεων περιόδου Μαΐου-Ιουνίου.

ΘΕΩΡΙΑ

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.
2. Να γράψετε τη γενική μορφή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και τον τύπο που δίνει τις λύσεις της

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα;
 α) $x=9$
 $x-2\psi=5$
 β) $3x-3=2\psi+4$
 $3x-\psi=11$
2. Να συμπληρώσετε και να μεταφέρετε τις παρακάτω ισότητες στο φύλλο απαντήσεων;
 i) $(3 + \dots)^2 = \dots + \dots + 9\alpha^2$ ii) $(\dots - 4x)^2 = 25\psi^2 - \dots + \dots$
3. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\angle A=90^\circ$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ είναι όμοια.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Από τα δυο θέματα θεωρίας να γράψετε **μόνο** το ένα και από τις τρεις ασκήσεις **μόνο** τις δυο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ

ΓΡΑΠΤΩΝ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α) Τι λέγεται ταυτότητα ;
- Β) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.
- Γ) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένο τον πίνακα:

α	β	γ	δ

αντιστοιχίζοντας κάθε ταυτότητα της στήλης Α με το ανάπτυγμά της από την στήλη Β .

	ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α.	$(\alpha + \beta)^2 =$	1. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
β.	$(\alpha - \beta)^3 =$	2. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
γ.	$(\alpha - \beta)^2 =$	3. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
δ.	$(\alpha + \beta)^3 =$	4. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α) Να διατυπώσετε δυο (2) κριτήρια ισότητας τριγώνων .

Β) Για τις παρακάτω προτάσεις να γράψεις στην κόλλα σου δίπλα από τον αριθμό της κάθε μιας το γράμμα (Σ) , αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη .

(1) Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση .

(2) Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και μια γωνία ίση αντίστοιχα τότε θα είναι ίσα .

(3) Δυο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια .

(4) Δυο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια .

(5) Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση , είναι όμοια .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2x + 1)^2 - 3x(x + 1) - 7$

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^2 + x - 6$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x - 6$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} 2(3x - 1) - (4y - 11) = -5 \\ \frac{2x + 1}{3} = x + \frac{3y - 2}{6} \end{cases}$$

(1) Να αποδείξετε ότι το σύστημα παίρνει τη μορφή :
$$\begin{cases} 6x - 4y = -14 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

(2) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα .

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να υπολογίσετε :

α . το $\eta \mu \omega$

β . την $\epsilon \varphi \omega$

γ . την τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{4}\eta \mu \omega + \frac{1}{3}\sin \omega - 3\epsilon \varphi \omega$

