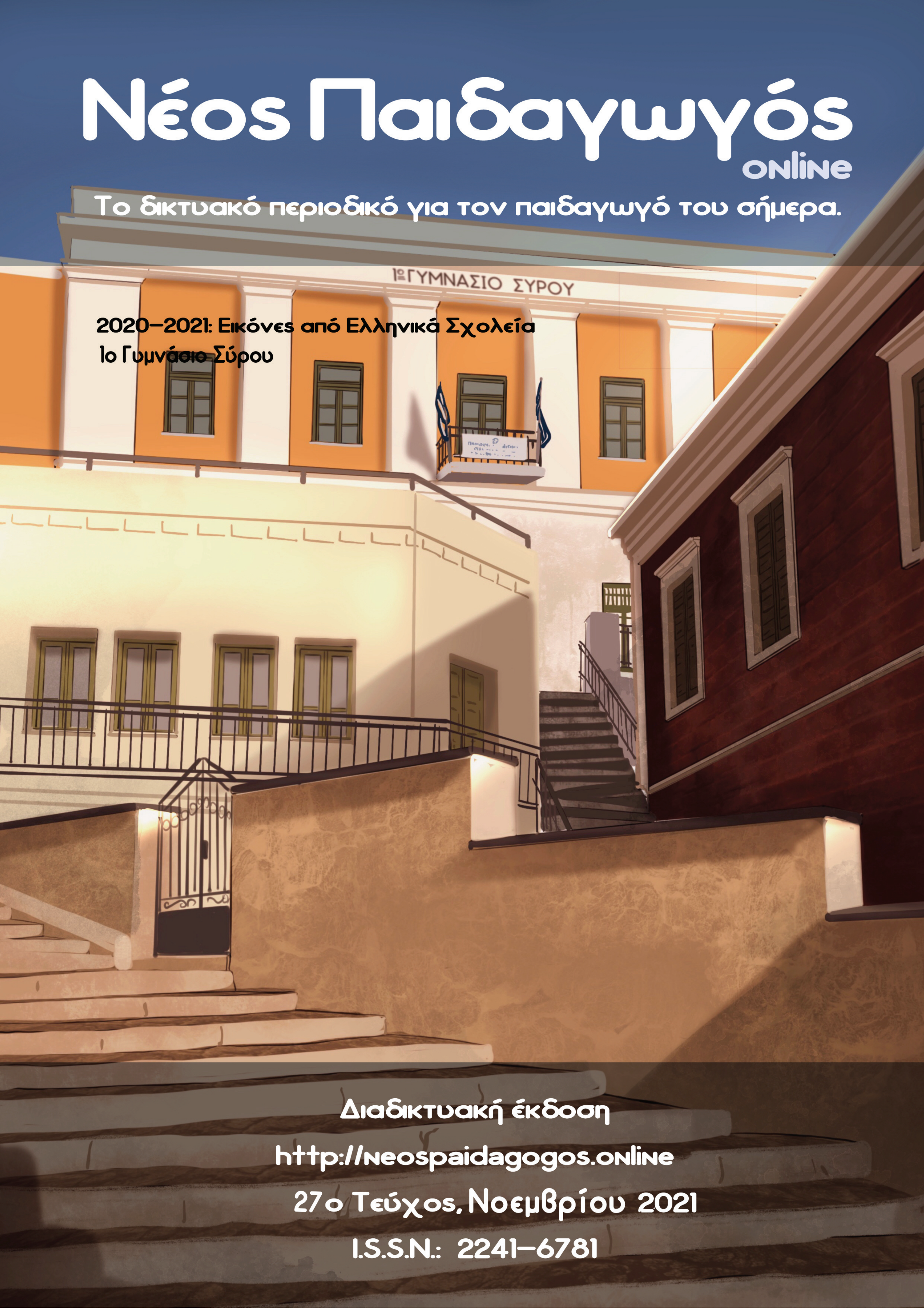
Νέος Παιδαγωγός
online

Το δικτυακό περιοδικό για τον παιδαγωγό του σήμερα.



2020–2021: Εικόνες από Ελληνικά Σχολεία
1ο Γυμνάσιο Σύρου

Διαδικτυακή έκδοση
http://neospaidagogos.online
27ο Τεύχος, Νοεμβρίου 2021
I.S.S.N.: 2241-6781

Γιατί οι μαθητές κάνουν λάθη στα Μαθηματικά

Τζικούδη – Παπαγεωργίου Χρυσάνθη
Πληροφορικός- Μαθηματικός, M.Sc. Πληροφοριακά Συστήματα

Περίληψη

Είναι γενικά παραδεκτό ότι οι μαθητές κάνουν λάθη στα μαθηματικά που τους ταλαιπωρούν διαχρονικά. Παρά τις προόδους στην εκπαίδευση και στις εφαρμογές των θεωριών μάθησης, τα λάθη εξακολουθούν να υπάρχουν και να επαναλαμβάνονται συνεχώς. Μέχρι σήμερα έχουν πραγματοποιηθεί πολλές μελέτες, οι οποίες εστιάζουν στον μαθητή, διότι απ' αυτόν γίνονται τα λάθη, χωρίς να αγνοούνται ο δάσκαλος και τα μορφωτικά αγαθά (το Αναλυτικό Πρόγραμμα και τα σχολικά βιβλία). Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να κατανοήσει τα αίτια και να αναζητήσει τρόπους αντιμετώπισης των λαθών, ώστε να μπορέσει να τα διορθώσει αλλά και να αποτρέψει τους μαθητές του από το να τα επαναλάβουν στο μέλλον. Στην παρούσα εργασία, γίνεται μία ανασκόπηση στη σχετική βιβλιογραφία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών λαθών, των αιτιών και των τρόπων αντιμετώπισής τους. Στη συνέχεια, μέσα από έρευνα σε 100 μαθητές της Β' τάξης Γυμνασίου της Θεσσαλονίκης, καταδεικνύονται ορισμένες από τις παρανοήσεις τους σε βασικές μαθηματικές έννοιες.

Λέξεις-Κλειδιά: μαθηματικά λάθη, γνωστικές συγκρούσεις, εννοιολογική μάθηση, αντιμετώπιση λαθών

Why Students Make Math Errors

Abstract

It is generally accepted that students make math errors that bother them over time. Despite advances in education and the applications of learning theories, errors persist and are repeated over and over again. To date, many studies have been carried out, which focus on the student, because he makes errors, but without ignoring the teacher and the educational goods (Curriculum and textbooks). It is important for the teacher to understand the causes and to look for ways to deal with errors, so that he can correct them and prevent students from repeating them in the future. In the present work, a review is made in the relevant literature of the categorization of mathematical errors, their causes and the ways of dealing with them. Then, through a research on 100 students of the 2nd class of a Junior High School in Thessaloniki, some of their misunderstandings in basic mathematical concepts are demonstrated.

Keywords: mathematical errors, cognitive conflicts, conceptual learning, error handling

Εισαγωγή

«Τα λάθη μας είναι ο προσωπικός μας δρόμος, η προσωπική μας πορεία για να αντιληφθούμε και να οργανώσουμε τις γνώσεις για τον κόσμο γύρω μας» (Ανδρούσου, Πανούτσος, 2004). Η διαδικασία για να αποκτήσει τη γνώση το άτομο στηρίζεται σε δύο βασικές αρχές: την «οργάνωση» και την «προσαρμογή». Ο Πιαζέ έχει τονίσει την τάση της ανθρώπινης σκέψης να γίνεται περισσότερο οργανωμένη καθώς αναπτύσσεται. Με τον όρο «οργάνωση» ο Πιαζέ εννοεί τη διαδικασία με την οποία τα άτομα συντονίζουν και συνδυάζουν έννοιες και πράξεις για να σχηματίσουν συναφή και συστηματικά μοντέλα σκέψης. Η «προσαρμογή» είναι η διαδικασία με την οποία τα άτομα αλλάζουν έτσι, ώστε να προσαρμοστούν στο περιβάλλον τους. Πραγματοποιείται με δύο συμπληρωματικούς τρόπους: την «αφομοίωση», με την οποία οι νέες εμπειρίες γίνονται αντιληπτές ή ερμηνεύονται σύμφωνα με τις προϋπάρχουσες δομές σκέψης του ατόμου και τη «συμμόρφωση», η οποία βοηθά το άτομο να αλλάξει τα προϋπάρχοντα μοντέλα σκέψης για να ταιριάξουν στις νέες εμπειρίες (Μανωλίτσης, 2013).

Σύμφωνα με τη θεωρία του συμπεριφορισμού, τα λάθη είναι χαρακτηριστικά μιας δυσλειτουργίας και θεωρούνται συνώνυμα της αποτυχίας. Αποτυχία για τον μαθητή που δεν μπόρεσε να δράσει σωστά και του καθηγητή που δεν προγραμμάτισε σωστά τα «επίπεδα μάθησης» (Ράπτη, 2002). Οι μαθητές κάνουν λάθη για διάφορους λόγους. Μπορεί να έχουν παρανοήσει κάποια έννοια ή να εφαρμόζουν λανθασμένα έναν αλγόριθμο. Το λάθος, όμως, μπορεί να είναι και αποτέλεσμα μιας κακής διδασκαλίας ή ενός κακογραμμένου σχολικού βιβλίου. Σύμφωνα με τις παραδοσιακές παιδαγωγικές μεθόδους διδασκαλίας, το λάθος φανερώνει μία ατελή διεργασία που επιτελεί ο μαθητής γιατί δεν έχει την απαραίτητη γνώση που θα του επιτρέψει να το αποφύγει και πρέπει να αποφεύγεται, διότι θα μπορούσε να εδραιωθεί ως (λανθασμένη) γνώση στο μυαλό του (Henry, 1999).

Οι απλοϊκές αντιλήψεις που επικρατούσαν για το λάθος από το 1910 έως το 1970, έχουν πλέον ξεπεραστεί (Belanger, 1991). Στον κονστρουκτιβισμό το λάθος δεν θεωρείται κατακριτέο, ούτε τιμωρείται. Αντίθετα, είναι επιθυμητό και αποκαλύπτει τις προηγούμενες λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών. Η «θεραπεία» του λάθους μπορεί να γίνει ως εξής: Να εξακριβώσει πρώτα ο εκπαιδευτικός την εσφαλμένη αντίληψη που προκάλεσε το λάθος και στη συνέχεια να προκαλέσει γνωστικές συγκρούσεις ώστε να αποκαλυφθεί η λανθασμένη μέθοδος ή λογική που οδήγησε τον μαθητή στο λάθος (Μπαραλός, 2007). Ας θυμηθούμε τη μορφή διαλόγου που χρησιμοποιούσε ο Σωκράτης, τη διαλεκτική μέθοδο. Με μια σειρά ερωτήσεων – απαντήσεων, οδηγούσε τον συνομιλητή του στην ανακάλυψη της αλήθειας, δίνοντάς του το ερέθισμα για κριτική σκέψη. Στην αρχή του διαλόγου, τον άφηνε να εκφράσει αβίαστα την άποψή του, όποια κι αν ήταν αυτή. Στη συνέχεια, μέσα από μία διαδικασία ερωτήσεων – απαντήσεων, χρησιμοποιώντας απλά παραδείγματα, κατέρριπτε τα επιχειρήματα του συνομιλητή του και αναδείκνυε τις λανθασμένες απόψεις του. Έτσι, τον βοηθούσε να προσεγγίσει την αλήθεια.

Κατηγορίες μαθηματικών λαθών

Μπορούμε να χωρίσουμε τα μαθηματικά λάθη των μαθητών σε τρεις βασικές κατηγορίες: α) υπολογιστικά λάθη, β) διαδικαστικά λάθη και γ) λάθη σε μαθηματικούς συμβολισμούς (Elbrink, 2008).

Τα υπολογιστικά λάθη (λάθη σε πράξεις) οφείλονται κυρίως σε απροσεξία ή έλλειψη συγκέντρωσης (Elbrink, 2008).

Τα διαδικαστικά λάθη γίνονται όταν οι μαθητές εφαρμόζουν εσφαλμένα μια διαδικασία (αλγόριθμο). Για παράδειγμα, όπως αναφέρεται στο άρθρο “Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions” (Vinner, Hershkowitz, & Bruckheimer, 1981), ένας μαθητής ανακαλεί στη μνήμη του ότι, για την πρόσθεση κλασμάτων πρέπει να χρησιμοποιήσει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, αλλά δεν χρησιμοποιεί τις πράξεις αυτές σωστά. Οι συγγραφείς θεωρούν αυτό το είδος λάθους ως λάθος «ανακατασκευής των λεπτομερειών». Σκοπός του εκπαιδευτικού, πρέπει να είναι η εννοιολογική μάθηση, η οποία προέρχεται από την κατανόηση. Η ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης επιτυγχάνεται με την κατασκευή συνδέσεων ανάμεσα στα στοιχεία μιας γνώσης, που είτε είναι ήδη γνωστά, είτε το ένα προϋπάρχει και το άλλο είναι νεοαποκτηθέν. Δεν είναι επιφανειακή, αλλά εις βάθος γνώση, που στηρίζεται στην κατανόηση των εννοιών και στις μεταξύ τους συνδέσεις και προάγει την «κατανόηση» (Hiebert, 1986). Αντίθετα, η αλγοριθμική μάθηση επικεντρώνεται στις δεξιότητες και τις, βήμα προς βήμα, διαδικασίες (αλγορίθμους). Η εκμάθηση αλγορίθμων πριν από την εκμάθηση των εννοιών, δεν οδηγεί σε μετέπειτα ουσιαστική μάθηση. Για να μπορούν οι έννοιες να «χτιστούν» η μία πάνω στην άλλη, πρέπει πρώτα να κατανοηθούν και να συνδυαστούν. Η κατανόηση των εννοιών και των συλλογισμών που εμπλέκονται σε έναν αλγόριθμο οδηγεί στην καλύτερη κατανόηση, άρα και γνώση της διαδικασίας. Μπορούν, ωστόσο, να χρησιμοποιηθούν τυποποιημένοι αλγόριθμοι έτσι, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και τους συλλογισμούς που σχετίζονται με τη διαδικασία (Ashlock, 2006). Πολλές φορές οι μαθητές εφαρμόζουν λανθασμένα μία διαδικασία (που εφαρμόστηκε με επιτυχία σε κάποιο πρόβλημα) σε ένα διαφορετικό πρόβλημα για το οποίο ο αλγόριθμος δεν είναι κατάλληλος. Αναγνωρίζουν τις ομοιότητες μεταξύ των προβλημάτων και αντί να αναλύσουν περαιτέρω τα προβλήματα για να βρουν τις διαφορές, χρησιμοποιούν εσφαλμένα μια διαδικασία που εφάρμοσαν σε ένα πρόβλημα που είχε παρόμοια χαρακτηριστικά. Στο βιβλίο "Error Patterns in Computation", ο R. Ashlock αποδίδει αυτά τα είδη λαθών στην υπερβολική γενίκευση (Ashlock, 2006). Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να υπερ-γενικεύσει εσφαλμένα το Πυθαγόρειο Θεώρημα και να το εφαρμόσει σε μη ορθογώνια τρίγωνα. Η υπερβολική ειδίκευση είναι το αντίθετο της υπερ-γενίκευσης. Όταν οι μαθητές εξειδικεύουν υπερβολικά, τότε περιορίζουν κατά λάθος τις διαδικασίες. Ο Ashlock στο βιβλίο του «Error Patterns in Computation» (Ashlock, 2006) αναφέρει «*Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να θεωρεί ότι για να προσθέσει ή να αφαιρέσει δεκαδικούς αριθμούς, πρέπει να υπάρχει ο ίδιος αριθμός ψηφίων και δεξιά και αριστερά από την υποδιαστολή*».

Λάθη σε μαθηματικούς συμβολισμούς γίνονται όταν οι μαθητές ερμηνεύουν λανθασμένα προβλήματα που χρησιμοποιούν μαθηματικά σύμβολα. Τα μαθηματικά σύμβολα είναι το μέσο με το οποίο γράφουμε μαθηματικά και επικοινωνούμε μία μαθηματική έννοια (Usiskin, 1996). Η μαθηματικοί συμβολισμοί δυσκολεύουν συχνά τους μαθητές. Καθώς προσπαθεί ο εκπαιδευτικός να προσφέρει εμπειρίες που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά, πρέπει να επιτύχει και έναν μακροχρόνιο στόχο: την οικοδόμηση της ευχέρειας των μαθητών στη χρήση των μαθηματικών συμβολισμών. Οι μαθητές που δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν μαθηματικούς συμβολισμούς, θα συναντήσουν εμπόδια στη μαθηματική τους ανάπτυξη (Rubenstein & Thompson, 2001). Είναι επιβεβλημένη η εννοιολογική κατανόηση, πριν από την κατανόηση της διαδικασίας, για να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια που κρύβεται πίσω από τα μαθηματικά σύμβολα (Skemp, 1976).

Προτάσεις αντιμετώπισης των μαθηματικών λαθών

Τα υπολογιστικά λάθη συμβαίνουν συνήθως λόγω έλλειψης προσοχής. Μια καλή πρακτική αντιμετώπισης των λαθών αυτών θα ήταν η εξής: Ο εκπαιδευτικός μπορεί να συντάξει μία λίστα με συνηθισμένα υπολογιστικά λάθη, την οποία να χρησιμοποιεί κατά τη διδασκαλία του στην τάξη και να τη διαθέτει στους μαθητές του, ώστε να εντοπίζουν ευκολότερα αυτού του είδους τα λάθη. Επιπρόσθετα, κάθε μαθητής μπορεί να σημειώνει τα λάθη που έκανε (στα βαθμολογημένα, από τον καθηγητή του, τεστ) κι έτσι να τα αποφεύγει στις επόμενες εργασίες του.

Η μαθηματική γλώσσα είναι «πυκνή». Χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα στη θέση εκφράσεων. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να γνωρίζει τις δυσκολίες που δημιουργούν οι μαθηματικοί συμβολισμοί στους μαθητές. Ο μαθηματικός συμβολισμός και η κατανόηση της μαθηματικής έννοιας είναι αλληλένδετες, αλλά η κατανόηση πρέπει γενικά να προηγείται του συμβολισμού. Η καθημερινή γλώσσα είναι ένα μέσο που μπορεί να χρησιμεύσει ως βάση για την εκμάθηση των μαθηματικών συμβολισμών. Για μια πρώτη εκμάθηση των μαθηματικών συμβολισμών μπορούν οι μαθητές να δημιουργήσουν έναν δικό τους πίνακα με τους μαθηματικούς συμβολισμούς που διδάσκονται και τι αυτοί σημαίνουν (Rubenstein & Thompson, 2001). Μία άλλη χρήσιμη τακτική είναι να διαβάζουν φωναχτά τη μαθηματική έκφραση και να σταματούν κατά διαστήματα, ώστε να μοιράζονται μεταξύ τους αντιλήψεις, σχόλια και ερωτήσεις (Siegel et al., 1996). Τα αυτοσχέδια «γκράφιτι» είναι ένας ευχάριστος τρόπος που μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να συσχετίσουν οπτικά τα μαθηματικά σύμβολα με τις έννοιές τους. Μερικά παραδείγματα, που ο δάσκαλος μπορεί να μοιραστεί με τους μαθητές προτού τους ζητήσει να δημιουργήσουν τα δικά τους, είναι: $\sqrt{oot}$, FACTOR!AL, Δifference, e^{x}ponent, ang∠e (Rubenstein & Thompson, 2001). Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα (Toumasis, 1995) είναι μια άλλη στρατηγική μάθησης που βοηθά τους μαθητές.

Στο "Learning and Teaching with Understanding" (Hiebert & Carpenter, 1992) προτείνεται η δημιουργία δικτύων γνώσεων. Προς την κατεύθυνση αυτή, ένα εργαλείο που κέρδισε την προσοχή της ερευνητικής και εκπαιδευτικής κοινότητας τις τελευταίες δεκαετίες αποτελεί η εννοιολογική χαρτογράφηση (conceptual mapping), η οποία μπορεί να παράσχει μια οπτική αναπαράσταση των γνωστικών δομών ενός ατόμου πάνω σε ένα συγκεκριμένο πεδίο γνώσης. Ο εννοιολογικός χάρτης είναι ένα γραφικό εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οργανώσει και να αναπαραστήσει τη γνώση. Ως μαθησιακό εργαλείο, μπορεί να βοηθήσει τον μαθητή να αποσαφηνίσει τη φύση και το πλήθος των συνδέσεων μεταξύ των καινούριων μαθηματικών εννοιών και να επεξεργαστεί το αποτέλεσμα της μάθησής του (Jin & Wong, 2011).

Είναι γενικά παραδεκτό ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα μία έννοια όταν αυτή έχει άμεση εφαρμογή στην καθημερινή ζωή. Επομένως, εκτός από τη σύνδεση της διαδικαστικής μάθησης με την εννοιολογική μάθηση, είναι επίσης σημαντικό να συνδέονται και οι δύο με εφαρμογές από την πραγματική ζωή. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να χρησιμοποιούν πολλά διαφορετικά παραδείγματα προβλημάτων (σχήματα) αλλά και αντιπαραδείγματα έτσι, ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατανοήσουν ότι ένας κανόνας που ισχύει σε ένα σχήμα μπορεί να μην ισχύει σε ένα άλλο. Οι τρέχουσες γνωστικές δομές και η μεταγνωστική ικανότητα του μαθητή είναι, επίσης, σημαντικοί παράγοντες που δεν πρέπει να ξεχνά ο εκπαιδευτικός όταν αναπτύσσει δραστηριότητες για την αντιμετώπιση των μαθηματικών λαθών. Αφού αναγνωρίσει το λάθος, πρέπει να εντοπίσει τις τρέχουσες γνωστικές δομές που χρησιμοποίησε ο μαθητής για την κατανόηση μίας νέας μαθηματικής έννοιας. Στη σύγχρονη διδακτική πρακτική, οι μαθητές καθοδηγούνται ώστε να πετύχουν την αυτορρύθμισή τους, δηλ. να έχουν την ικανότητα να ελέγχουν οι ίδιοι την πορεία της μάθησής τους, να κατανοούν τα λάθη τους και να ξέρουν πώς να τα διορθώνουν (Βοσνιάδου, 2001). Τα λάθη πρέπει να αντιμετωπίζονται θετικά στη διαδικασία εκμάθησης και να θεωρούνται ως μια ευκαιρία να προβληματιστούν οι μαθητές και να μάθουν. Για παράδειγμα, μια ομάδα μαθητών μπορεί να εξετάσει έναν λανθασμένο αλγόριθμο και με συλλογισμούς βασισμένους πάνω σε γνωστές έννοιες, να εντοπίσει γιατί η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε δεν οδήγησε σε σωστή απάντηση. Καθώς οι μαθητές μαθαίνουν αλγορίθμους, μαθαίνουν πρότυπα λαθών. Οι αλγόριθμοι που ενσωματώνουν πρότυπα λαθών ονομάζονται buggy algorithms (εφαρμογές λανθασμένων διαδικασιών) (Hatano, Amiwa & Inagaki, 1996). Ένας τέτοιος λανθασμένος αλγόριθμος παρατίθεται στη σελίδα 46 του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Α' Λυκείου (2017), ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν ότι όταν προτίθενται να διαγράψουν τον ίδιο παράγοντα, πρέπει πρώτα να ελέγξουν εάν ο παράγοντας αυτός ισούται με μηδέν: *«Έστω α = 1. Τότε έχουμε διαδοχικά:*

$$\alpha = 1$$

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot 1$$

$$\alpha^2 = \alpha$$

$$\alpha^2 - 1 = \alpha - 1$$

(α + 1) · (α – 1) = (α – 1) · 1

α + 1 = 1

α = 0

Όμως έχουμε και α = 1, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα (α + 1) · (α – 1) = (α – 1) · 1 διαγράψαμε τον παράγοντα (α – 1) ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.»

Η αυτοαξιολόγηση είναι, επίσης, ένα κρίσιμο στοιχείο της πρόληψης και της διόρθωσης των μαθηματικών λαθών. Ο μαθητής πρέπει να είναι ικανός να αυτοαξιολογήσει την κατανόησή του. Αλλά και το περιβάλλον της τάξης πρέπει να δημιουργεί ευκαιρίες στους μαθητές να ανακαλύπτουν και να αναγνωρίζουν τα λάθη τους. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της αλληλεπίδρασης των μαθητών και της συζήτησης. Ο χρόνος που δίνεται στον μαθητή είναι ακόμη ένας παράγοντας που πρέπει να λαμβάνει υπόψη του ο εκπαιδευτικός.

Εμπειρική έρευνα σε 100 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου

Για τις ανάγκες της έρευνας, τον Φεβρουάριο 2018, δόθηκε σε 100 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου στην περιοχή της Θεσσαλονίκης ένα ερωτηματολόγιο 15 ερωτήσεων σε ηλεκτρονική μορφή στον ιστότοπο https://testmoz.com/. Για τη στατιστική ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το IBM SPSS Statistics 26.0 for Windows.

Αποτελέσματα της έρευνας

α/α ερώτησης	**ΕΡΩΤΗΣΗ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΑ**
1	Ισχύει: $5^2 = 10$	88%	12%
2	Ισχύει: $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \beta$	62%	38%
3	Ισχύει: $X^2 \cdot X^5 = X^{10}$	60%	40%
4	Η εξίσωση $X^2 = 25$ έχει μοναδική λύση την Χ	40%	60%
5	Ισχύει : $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2$	43%	57%
6	Η τετραγωνική ρίζα του 9 είναι: …	56%	44%
7	Το αποτέλεσμα της πράξης: (-2) · (-5) είναι: …	75%	25%
8	Το αποτέλεσμα της πράξης: (-2) + (-5) είναι:	73%	27%
9	Ισχύει: $\frac{3}{0} = 0$	45%	55%

10	Βάλε τους αριθμούς, στη σωστή σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: 5/4 1,125 1 1,075 1,6	49%	51%
11	Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης: $1,5 + \frac{1}{2}$	72%	28%
12	Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης: $1 - \frac{5}{6}$	62%	38%
13	Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$	88%	12%
14	Για να στρωθεί με πλακάκια ένα δάπεδο χρειάστηκαν 160 τετράγωνα πλακάκια πλευράς 30 εκ. Πόσα πλακάκια πλευράς 40 εκ. θα χρειαζόταν για να στρωθεί το ίδιο δάπεδο;	58%	42%

Από τον παραπάνω πίνακα, μπορεί κανείς να διακρίνει τις παρανοήσεις των μαθητών σε βασικές μαθηματικές έννοιες. Ενώ οι περισσότεροι γνωρίζουν τον ορισμό της ύψωσης στο τετράγωνο (ερώτηση 1, ποσοστό σωστών απαντήσεων 88% [95% δ.ε.: (81,63%, 94,37%)]), πολλοί δεν έχουν κατανοήσει τις ιδιότητες των δυνάμεων (ερώτηση 3: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 40% [95% δ.ε.: (30,40%, 49,60%)]) και τις βασικές ταυτότητες που προκύπτουν από τον ορισμό της δύναμης και την επιμεριστική ιδιότητα (ερώτηση 5: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 60% [95% δ.ε.: (47,30%, 66,70%)]). Σε ποσοστό 44% [95% δ.ε.: (34,27%, 53,73%)] δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της τετραγωνικής ρίζας (ερώτηση 6) και κυρίως τη συσχέτισή της με την επίλυση μιας απλής εξίσωσης 2ου βαθμού, καθώς το 60% απάντησε λανθασμένα στην ερώτηση 4 [95% δ.ε.: (50,40%, 69,60%)] . Το 55% [95% δ.ε.: (45,25%, 64,75%)] των μαθητών δεν γνωρίζει ότι κλάσμα με παρονομαστή το μηδέν, δεν ορίζεται (ερώτηση 9). Οι μισοί περίπου από τους μαθητές (51%) στην ερώτηση 10 δεν διέταξαν σωστά (από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο) δεκαδικούς, κλασματικούς και ακέραιους αριθμούς [95% δ.ε.: (41,20%, 60,80%)]. Παρανοήσεις υπάρχουν, επίσης, στην έννοια του κλάσματος, στη διαδικασία εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων που περιέχουν κλασματικούς αριθμούς, αλλά και στις ιδιότητες που μπορούν να εφαρμοστούν σ’ αυτούς π.χ. απλοποίηση όρων (ερώτηση 2: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 38% [95% δ.ε.: (28,49%, 47,51%)], ερώτηση 12: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 38% [95% δ.ε.: (28,49%, 47,51%)], ερώτηση 11: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 28% [95% δ.ε.: (19,20%, 36,80%)]). Μικρό σχετικά ποσοστό των μαθητών (12%) δεν απάντησε σωστά και στην ερώτηση 13 που αφορά τον πολλαπλασιασμό δύο κλασματικών αριθμών [95% δ.ε.: (5,62%, 18,37%)]. Η διαδικασία προσέγγισης ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος (ερώτηση 14), από την κατανόηση έως την επίλυσή του, δημιούργησε πρόβλημα στο 42% των μαθητών [95% δ.ε.: (32,33%, 51,67%)]. Το 40% [95% δ.ε.: (30,40%, 49,60%)] των μαθητών δεν έχει κατανοήσει την έννοια της απόλυτης τιμής αριθμού (ερώτηση 15). Αρκετοί μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την έννοια των αρνητικών αριθμών και τη διαδικασία εκτέλεσης των πράξεων ανάμεσα σε αρνητικούς αριθμούς (ερώτηση 8: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 27% [95% δ.ε.: (18,30%, 35,70%)] και ερώτηση 7: ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 25% [95% δ.ε.: (16,51%, 33,49%)]).

Συμπεράσματα

Η διδακτική πρακτική, μετά από κατάλληλη προετοιμασία, μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, εάν ο εκπαιδευτικός κατηγοριοποιήσει, καταγράψει και αξιοποιήσει τα μαθηματικά λάθη για να επιτύχει ευκολότερα τους διδακτικούς του στόχους. Θα πρέπει, επίσης, να γνωρίζει το «σημείο εκκίνησης» κάθε μαθητή δηλ. αυτά που ήδη ξέρει, ώστε να είναι σε θέση να παρακολουθήσει την πορεία του δηλ. να κάνει «διαμορφωτική αξιολόγηση» η οποία θα ανατροφοδοτήσει τη δική του δράση, ώστε να βοηθήσει τελικά τον μαθητή (Σφυρόερα, 2007). Η διδασκαλία των εννοιών πρέπει να γίνεται μέσα από παραδείγματα, τα οποία στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσει ο μαθητής για να επιλύσει τις ασκήσεις. Μέσα από τα παραδείγματα, ο μαθητής θα αφομοιώσει καλύτερα τις έννοιες, μελετώντας τες, όχι ξεκομμένα, αλλά εντάσσοντάς τες σ' ένα πλαίσιο σχέσεων. Πολύ σημαντικό είναι, επίσης, ο δάσκαλος να παρέχει αντιπαραδείγματα που οδηγούν σε λανθασμένα συμπεράσματα έτσι, ώστε ο μαθητής να δημιουργήσει νέες γνωστικές συγκρούσεις. Επίσης, πρέπει ο εκπαιδευτικός να δίνει μεγάλο βάρος στις ερωτήσεις. Κατάλληλες και σαφείς ερωτήσεις βοηθούν τον μαθητή να τις κατανοήσει και να τις απαντήσει, δημιουργώντας γνωστική σύγκρουση. Μέσα απ' αυτή τη σύγκρουση, αναδιοργανώνεται το ισχύον εννοιολογικό πλαίσιο. Τα διδακτικά εργαλεία (π.χ. οι δραστηριότητες) που θα επιλέξει ο εκπαιδευτικός πρέπει να αποκαλύπτουν την αδυναμία των προηγουμένων «γνωστικών σχημάτων», ώστε οι μαθητές να αναγκαστούν να τα αντικαταστήσουν με νέα. Η λανθασμένη απάντηση πρέπει να θεωρείται το ίδιο χρήσιμη με τη σωστή. Η σωστή απάντηση αναδεικνύει τμήματα των διδακτικών ενοτήτων, για τα οποία ο μαθητής δεν αντιμετωπίζει δυσκολίες μάθησης, ενώ οι λανθασμένες απαντήσεις μπορούν να αναδείξουν σημεία στα οποία υπάρχουν δυσκολίες. Για πολλές δεκαετίες, τόσο οι δάσκαλοι, όσο και οι μαθητές, θεωρούσαν το λάθος καταδικαστέο. Οι δάσκαλοι γιατί πίστευαν ότι μπορεί να δημιουργήσει παρανοήσεις στους μαθητές και να οδηγήσει στην εδραίωση λανθασμένων αντιλήψεων και οι μαθητές γιατί το ταύτιζαν με την αποτυχία και όχι με το έναυσμα για κατάκτηση νέων γνώσεων. Σήμερα πλέον έχει γίνει αντιληπτό ότι η ενασχόληση με το λάθος και η επεξεργασία του, ευνοεί τον διάλογο, μέσω του οποίου θα εκφραστούν διαφορετικές απόψεις που θα οδηγήσουν τους μαθητές σε νέα γνώση. Όλοι μαζί συζητούν τις διάφορες απόψεις που τίθενται και όλοι μαζί φτάνουν στην «αλήθεια». Ο εκπαιδευτικός δεν έχει πλέον το «αλάθητο» και δεν είναι ο μοναδικός κριτής των απόψεων. Συμμετέχει ενεργά, μαζί με τους μαθητές, στη συζήτηση. Πλέον το λάθος αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας, όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά σε όλες τις επιστήμες.

Ο εκπαιδευτικός οφείλει να παρωθήσει τους μαθητές του στο να εξερευνήσουν τα μαθηματικά σε βάθος δηλ. να κατανοήσουν τις έννοιες πίσω από την εφαρμογή των διαδικασιών και των αλγορίθμων. Οι περισσότεροι μαθητές πιστεύουν ότι οι μαθηματικές έννοιες είναι κάτι που μόνο ένας μεγαλοφυής άνθρωπος μπορεί πραγματικά να καταλάβει. Ακόμη και οι καλοί, στα μαθηματικά, μαθητές που μπορούν εύκολα να απομνημονεύσουν και να εφαρμόσουν διαδικασίες, σε πολλές περιπτώσεις δεν καταλαβαίνουν γιατί εφαρμόζουν αυτές τις διαδικασίες. Επιπλέον, αν ξεχάσουν τη διαδικασία, τους λείπει η εννοιολογική γνώση που χρειάζονται για να την ανακαλύψουν μόνοι τους. «Μαθαίνω Μαθηματικά» δεν σημαίνει ότι μαθαίνω ορισμούς, αλγορίθμους και αποδεικτικές διαδικασίες. Σημαίνει ότι μαθαίνω να σκέφτομαι με μαθηματικό τρόπο. Η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε επιμορφωτικές δράσεις που περιλαμβάνουν δραστηριότητες χειρισμού λαθών, θα έχει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ωστόσο, απαιτούνται περαιτέρω ερευνητικές μελέτες για την καταγραφή αποτελεσματικών μεθόδων καθοδήγησης των μαθητών, ώστε να χρησιμοποιήσουν τα λάθη τους για τη βελτίωση της μάθησής τους. Η δημιουργία και αξιολόγηση ειδικού εκπαιδευτικού υλικού γι' αυτόν τον σκοπό θα ήταν χρήσιμη.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Andreadakis, S. , Katsargiris, V. , Papastavridis, S. , Polizos, G. & Sverkos, A. (2017) *Algevra kai stoicheia pithanotiton A' Genikou Lykeiou*. Athina: ITIE DIOPHANTOS

Androusou, A. , Panoutsos, A. (2004). *Klidia kai antiklidia - Dimiourgontas yephires*. Athina: YPEPTH – Panepistimio Athinon.

Vosniadou, S. (2001). *Pos mathainoun i mathites*. DIETHNIS AKADIMIA TIS EKPAIDEFSIS - DIETHNES GRAPHIO EKPAIDEFSIS TIS UNESCO (Retrieved by: http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_07_gre.pdf on 24/04/2021)

Manolitsis, G. (2013). *Psychopaidagogiki tis proscholikis ilikias*. Rethimno: Paidagogiko Tmima Proskholikis Ekpaidefsis Panepistimiou Kritis

Baralos, G. (2007). *To lathos os stoicheio schediasmou tis didaskalias sta Mathimatika*. Kentro Ekpaideftikis Erevnas, Ta lathi ton mathiton: Deiktes Apotelesmatikotitas i Kleidia gia ti veltiosi tis Poiotitas tis Ekpaidefsis? . (Retrieved by: http://www.kee.gr/attachments/file/praktika/praktika_lathi.pdf on 20/04/2021)

Rapti, M. (2002). *Ta Lathi ton Mathiton kai o Rolos tous sti Diadikasia tis Mathisis*. Athina: Gutenberg.

Sphiroera, M. (2007). *Kleidia kai antikleidia - To lathos os ergalio mathisis kai didaskalias.* Athina: YPEPTH – Panepistimio Athinon.

Ξένη

Ashlock, R. (2006). *Error Patterns in Computation*. Ohio: Pearson Merrill Prentice Hall.

Belanger, M. (1991): *Les erreurs en arithmetique. Un siecle de presumption americainem Girade, Universite du Quebec a Montreal, publie dans petit x, no 26* Grenoble : IREM de Grenoble.

Elbrink, M. (2008). *Analysing and Addressing Common Mathematical Errors in Secondary Education*. Muncie: Ball State University.

Hatano, G., Amaiwa, S., & Inagaki, K. (1996). "Buggy algorithms" as attractive variants. *The Journal of Mathematical Behavior, 15(3)*, 285-302.

Henry, M. (1999). *Διδακτική μαθηματικών-Παρουσίαση της διδακτικής με στόχο την επιμόρφωση των διδασκόντων*. Αθήνα: Παν/μιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 65–97). Macmillan Publishing Co, Inc.

Jin, H. & Wong, K. Y. (2011). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics with Concept Mapping. *B. Kaur and K. Y. Wong, Assessment in the mathematics classroom* (pp. 67-90). Singapore: World Scientific.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science, 17(4),* 309-338.

Rubenstein, R., Denisse R. Thompson. D. (2001). Learning Mathematical Symbolism: Challenges and Instructional Strategies. *DISCUSS WITH YOUR COLLEAGUES 94(4),* p.265-271.

Siegel, M.; Borasi, R.; Fonzi, 1. M.; Sanridge, L. G. & Smith, C. (1996). *Using reading to construct mathematical meaning. P. C Elliott, M. J. Kenney (Eds.) Communication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 66-75). Reston, VA: NCTM.

Skemp R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Toumasis, C. (1995). Concept Worksheet: An Important Tool for Learning. *Mathematics Teacher 88(2),* 98 –100.

Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a language. In P. Elliott and M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 231-243). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S, Hershkowitz, R., & Bruckheimer, M. (1981). Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education 12(1),* 70-76.